

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР  
КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ С. П. КОРОЛЕВА

В. И. ПАНИН, М. И. КОЧНЕВ,  
К. И. ИВАЩЕНКО, Г. И. ПАНКОВА

**ПРОЕЦИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ  
АВИАЦИОННЫХ ДЕТАЛЕЙ  
В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

КУЙБЫШЕВ 1978

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ С. П. КОРОЛЕВА

В. И. ПАНИН, М. И. КОЧНЕВ,  
К. И. ИВАЩЕНКО, Г. И. ПАНКОВА

**ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ  
АВИАЦИОННЫХ ДЕТАЛЕЙ  
В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

*УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ*

*Утверждено редакционно-издательским  
советом института 30.12.76 г.*

КУЙБЫШЕВ 1978

УДК 515:629.7(075)

Пособие является второй частью работы, посвященной проецированию элементов деталей машин. В нем на основе современной теории изображения рассматриваются вопросы пересечения поверхностей плоскостью и прямой линией, пересечения поверхностей друг с другом, а также аксонометрическое проецирование.

Пособие составлено на основе опыта преподавания начертательной геометрии в Куйбышевском авиационном институте.

## Раздел I

# КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ КУРСА И МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

## Глава I. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ И С ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ. ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТИ

### § 1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ ПЛОСКОСТЬЮ. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТЕЙ МНОГОГРАННИКОВ

*Сечением* называется плоская фигура, полученная в результате пересечения поверхности плоскостью.

Проекция сечения многогранника плоскостью можно построить двумя способами:

нахождением точек пересечения ребер многогранника с плоскостью;

нахождением линий пересечения граней многогранника с плоскостью.

**Пример 1.** Построить сечение призмы  $ABC$  плоскостью общего положения  $\Theta$  ( $h \times l$ ). Определить его натуральную величину и показать видимость сечения призмы на плоскостях проекций (рис. 1).

Для построения сечения воспользуемся первым способом. Проведем через ребро  $B$  вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость  $\Sigma$  ( $\Sigma_2$ ). В пересечении горизонтальной проекции линии пересечения  $I_1—2_1$  плоскостей  $\Theta$  и  $\Sigma$  с горизонтальной проекцией ребра  $B_1$  определяется горизонтальная проекция точки пересечения  $D_1$ , по которой находится ее фронтальная проекция  $D_2$ . Аналогично с помощью плоскостей  $\Sigma'$  и  $\Sigma''$  строим точки встречи  $E$  и  $F$  ребер  $A$  и  $C$ .

Соединяя одноименные проекции найденных точек, получим проекции фигуры сечения  $D_1E_1F_1$  и  $D_2E_2F_2$ .

Видимость линий сечения на каждой из плоскостей проекций определяется видимостью граней призмы, которым принадлежат эти линии. Видимость поверхности относительно заданной плоскости  $\Theta$  определяется методом конкурирующих точек. В данном примере нижняя отсеченная часть призмы, закрытая плоскостью  $\Theta$ , будет невидимой.

Натуральную величину сечения  $D_0E_0F_0$  можно найти любым из известных методов. В рассмотренном примере она определена вращением вокруг горизонтали  $h$ .

**Пример 2.** Построить сечение пирамиды плоскостью общего положения  $\Omega$  ( $l \times j$ ). Определить натуральную величину сечения. Показать видимость (рис. 2).

Проекция фигуры сечения найдем путем определения точек пересечения ребер пирамиды с плоскостью  $\Omega$ .

Для нахождения точки пересечения ребра  $SA$  ( $S_2A_2$ ;  $S_1A_1$ ) проведена вспомогательная фронтально-проецирующая плоскость  $\Sigma$  ( $\Sigma_2$ ). В пе-

ресечении горизонтальной проекции линии пересечения  $1_1-2_1$  плоскостей  $\Omega$  и  $\Sigma$  с горизонтальной проекцией ребра  $S_1A_1$  определяется горизонтальная проекция точки пересечения  $D_1$ , по которой находится ее фронтальная проекция  $D_2$ . Аналогично при помощи плоскости  $\Sigma'(\Sigma'_2)$  найдена точка пересечения  $E$  ребра  $SB$  с плоскостью  $\Omega$ .

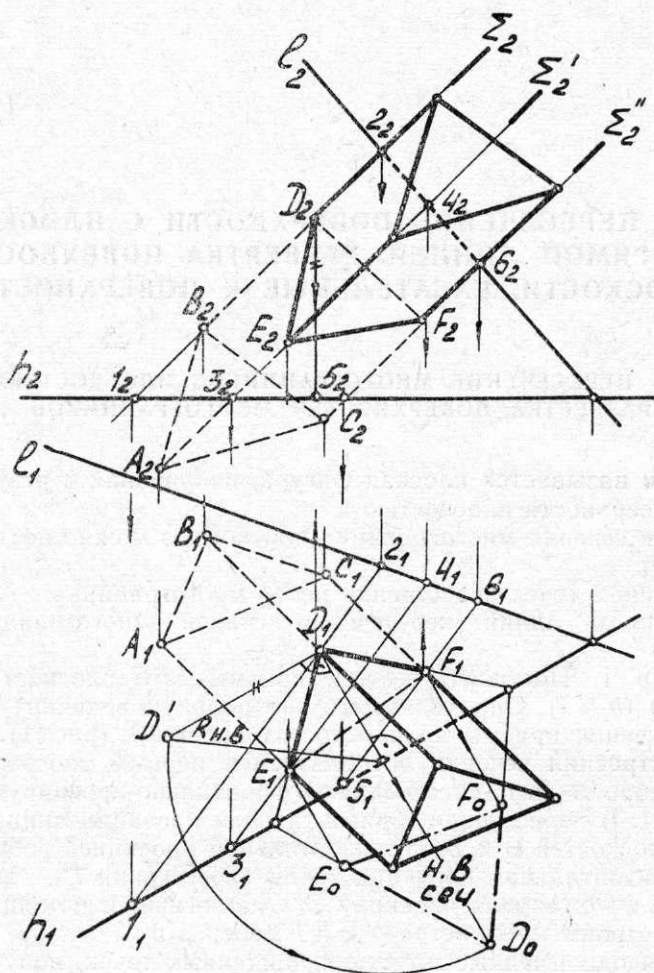


Рис. 1

Для нахождения точки пересечения ребра  $SC$  через него проведена горизонтально-проецирующая плоскость  $\Theta(\Theta_1)$ .

В пересечении фронтальной проекции линии пересечения  $5_2-6_2$  плоскостей  $\Omega$  и  $\Theta$  с фронтальной проекцией ребра  $S_2C_2$  находится фронтальная проекция точки пересечения  $F_2$ , а затем горизонтальная проекция — точка  $F_1$ . Соединяя одноименные проекции точек пересечения ребер, получим проекции фигуры сечения  $D_1E_1F_1-D_2E_2F_2$ . Натуральная величина сечения  $D_0E_0F_0$  определена вращением вокруг фронтальной  $f$ .

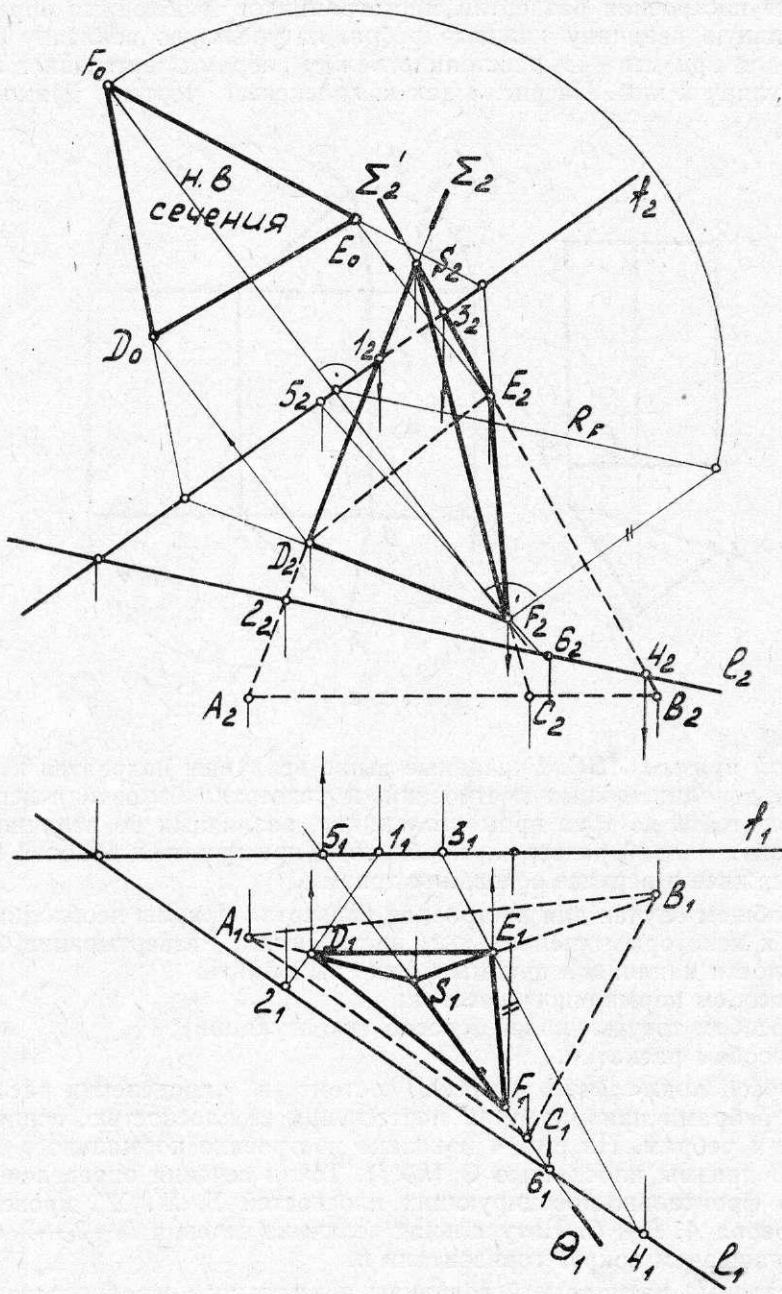


Рис. 2

## Развертка поверхностей многогранников

Разверткой поверхности какого-либо тела называется фигура, полученная путем совмещения поверхности этого тела с плоскостью.

Для построения развертки многогранников необходимо определить натуральную величину каждого ребра, натуральную величину основания, а для призмы — и расстояние между ребрами, измеренное по перпендикуляру к ним. На рис. 3 дан комплексный чертёж прямой тре-

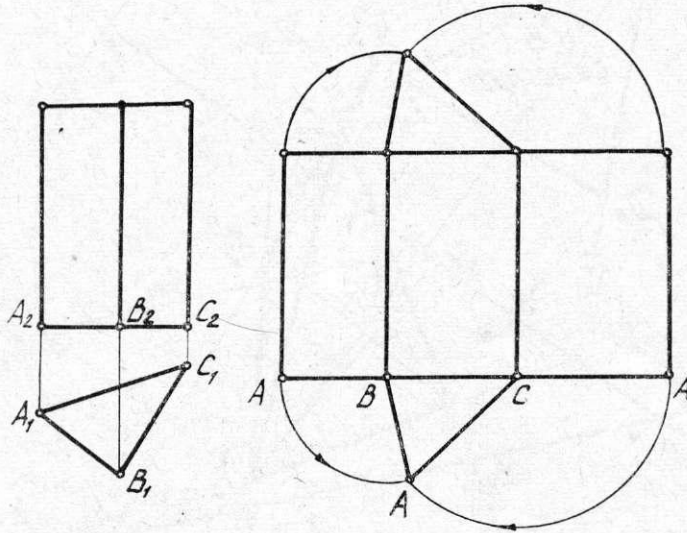


Рис. 3

угольной призмы  $ABC$ . Указанные выше величины находятся из чертежа без дополнительных построений, и развертка боковой поверхности будет состоять из трех прямоугольников, различных по величине. Для построения полной развертки необходимо пристроить к боковой поверхности нижнее и верхнее основания призмы.

В общем случае для построения развертки призмы необходимо прибегать к некоторым специальным построениям. Развертывание боковой поверхности наклонной призмы можно выполнить:

- способом нормального сечения;
- способом треугольников (способ триангуляции);
- способом раскатки.

*Способ нормального сечения* состоит в определении расстояния между ребрами призмы путем пересечения ее плоскостью, перпендикулярной к ребрам. На рис. 4 показано построение нормального сечения  $1-2-3$  призмы плоскостью  $\Theta$  ( $h \times f$ ). Точки сечения определены с помощью фронтально-проецирующих плоскостей  $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$ , проведенных через ребра  $A, B$  и  $C$ . Натуральная величина сечения  $1_0-2_0-3_0$  определена вращением вокруг горизонта  $h$ .

Стороны натуральной величины нормального сечения развертываются в прямую линию  $1_0 2_0 3_0 1_0$ , и на перпендикулярах, проведенных через точки  $1_0 2_0 3_0 1_0$ , откладываются натуральные величины соответствующих ребер, которые определены методом прямоугольного треугольника.

На развертке с натуральных величин ребер отложены следующие отрезки:  $1_0-B=1'-B'$ ;  $2_0-A=2'-A'$ ;  $3_0-C=3'-C_2$

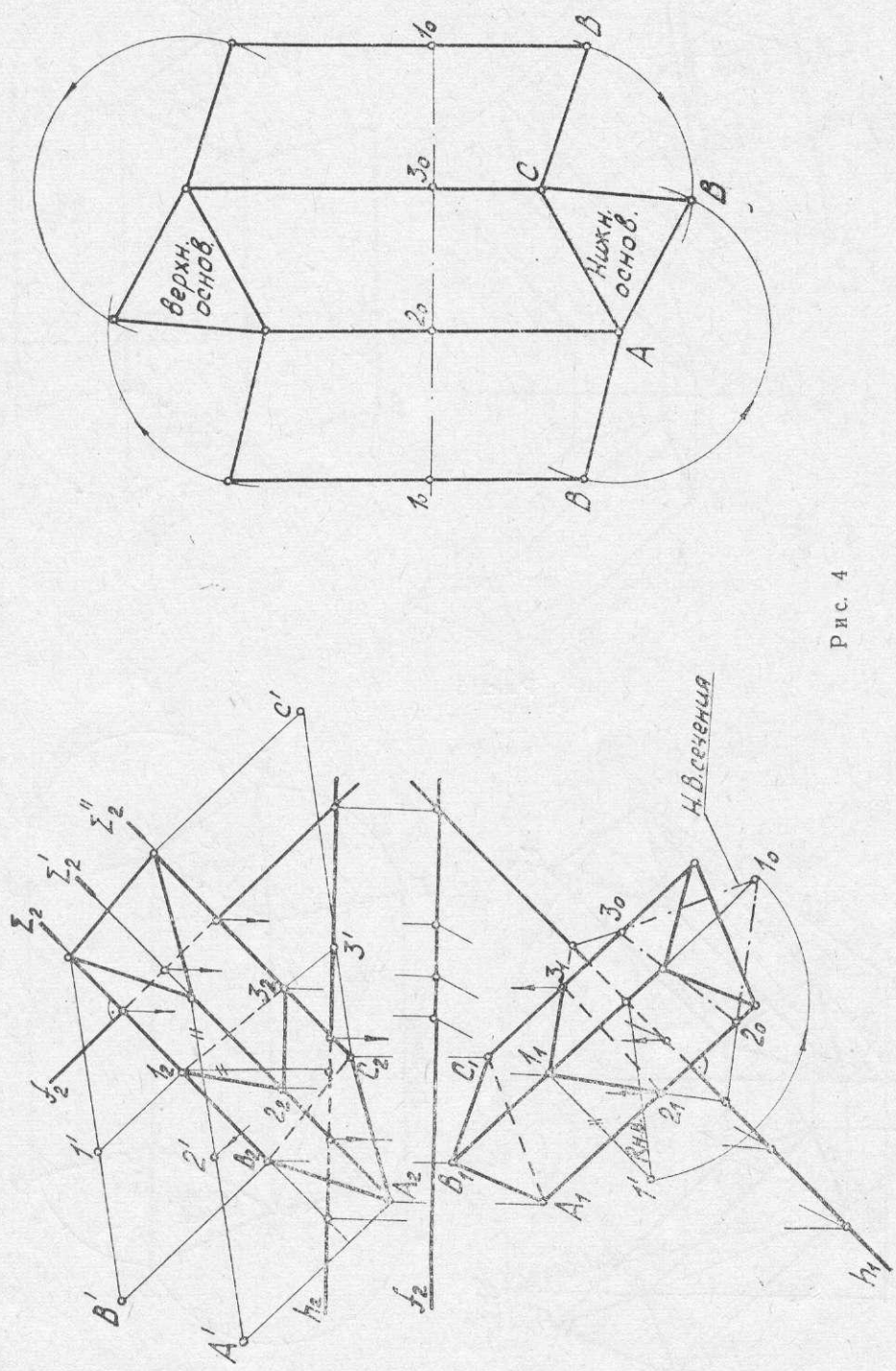


Рис. 4

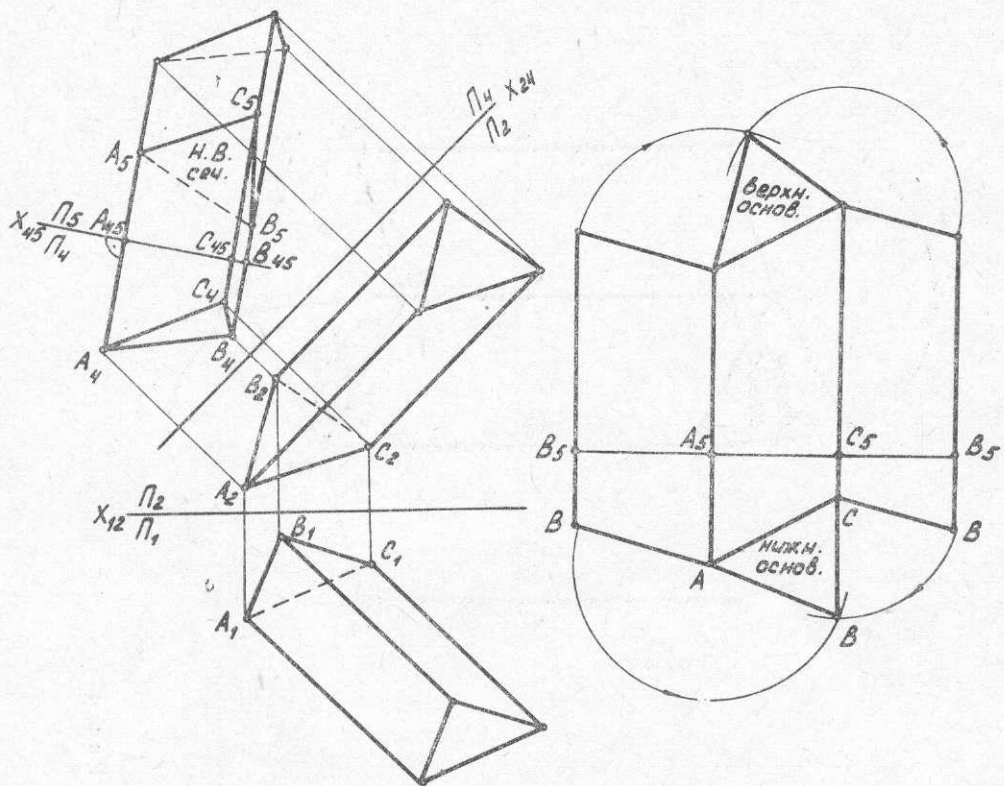


Рис. 5

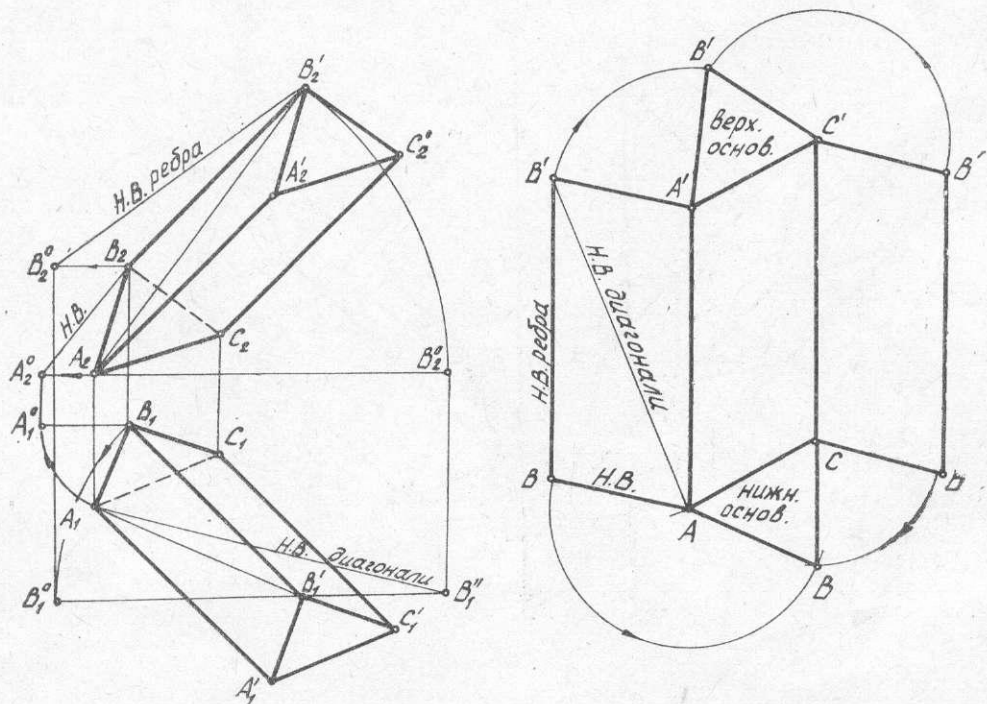


Рис. 6

Натуральные величины верхнего и нижнего оснований можно пристроить к любой из граней боковой поверхности.

Натуральную величину сечения можно также получить, используя методы преобразования проекций. На рис. 5 рассмотрено построение нормального сечения методом перемены плоскостей проекций. Для этого заменим плоскость  $\Pi_1$  на  $\Pi_4$ , параллельную ребрам призмы. При этом ребра призмы спроецируются на плоскость  $\Pi_4$  в натуральную величину. Затем заменим плоскость  $\Pi_2$  на  $\Pi_5$ , перпендикулярную ребрам призмы, которая для уменьшения размеров чертежа проведена так, чтобы она пересекала призму. В этом случае стороны треугольника  $A_5B_5C_5$  будут равны натуральным величинам расстояний между ребрами. Развертка боковой поверхности призмы строится аналогично рассмотренной на рис. 4, при этом  $B_5-B=B_{45}-B_4$ ;  $A_5-A=A_{45}-A_4$ ;  $C_4-C_{45}=C_5-C$ .

По способу треугольников грани призмы разбиваются диагоналями на треугольники, определяются натуральные длины их сторон и выполняется последовательное построение этих треугольников в плоскости чертежа (рис. 6).

Грань призмы  $AA'B'B$  разбита диагональю  $AB'$  на два треугольника  $AA'B'$  и  $B'BA$ . Натуральная величина ребра  $BB'$  определена вращением вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций и проходящей через точку  $B'$ . Другие два ребра  $AA'$  и  $CC'$  по величине равны ребру  $BB'$  и определения их натуральной величины не требуется. Натуральная величина диагонали  $AB'$  определена вращением вокруг

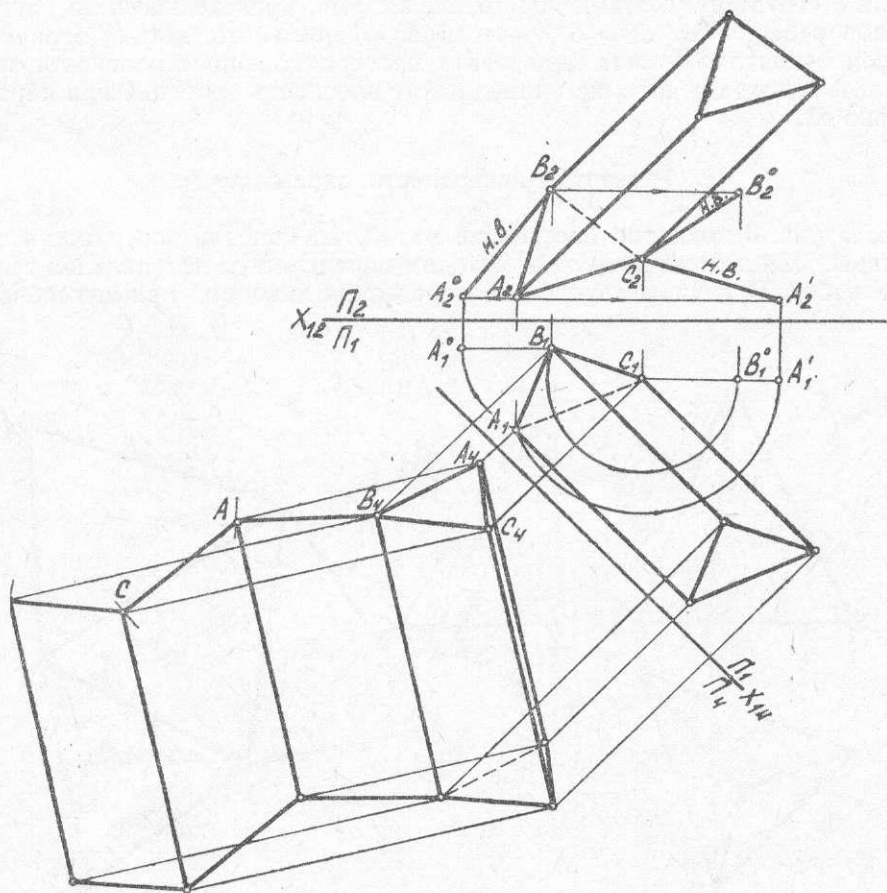


Рис. 7

оси, перпендикулярной фронтальной плоскости проекций и проходящей через точку  $A$ . Натуральная величина ребра основания  $AB$  определена вращением вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций и проходящей через точку  $B$ .

По натуральным величинам сторон  $A_2^0B_2$ ,  $B_2'B_2^0$ ,  $A_1B_1''$  в плоскости чертежа строятся треугольники  $ABB'$  и  $B'A'A$ , при этом  $AB=A_2^0B_2$ ;  $BB'=B_2'B_2^0$ ,  $AB'=A_1B_1''$ . Определение натуральных величин других ребер, сторон основания и соответствующих диагоналей призмы производится аналогично. Полная развертка призмы показана на чертеже.

На рис. 7 показано построение развертки боковой поверхности призмы *по способу раскатки*. Для этого методом перемены плоскостей проекций спроецируем призму на новую фронтальную плоскость  $\Pi_4$ , параллельную ребрам призмы. При этом ее ребра спроецируются на плоскость  $\Pi_4$  в натуральную величину. Определим также натуральные величины ребер основания, например вращением вокруг осей, перпендикулярных горизонтальной плоскости проекций и проходящих через точки  $B$  и  $C$ .

Из точек  $A_4$ ,  $B_4$ ,  $C_4$  проведем перпендикуляры к новым проекциям ребер. Затем из точки  $B_4$  радиусом  $B_4A=B_2A_2^0$  проводим дугу до пересечения с перпендикуляром, проведенным из точки  $A_4$ , получаем точку  $A$ . Затем радиусом  $AC=A_2'C_2$  из точки  $A$  проводим дугу до пересечения с перпендикуляром, проведенным из точки  $C_4$ , получим точку  $C$  и т. д. Из точек  $A$ ,  $C$ ,  $B$  проводим прямые, параллельные ребру  $B_4$  до пересечения с соответствующими перпендикулярами, проведенными из других концов ребер. Этот способ целесообразно применять, когда величина сторон основания может быть взята непосредственно с плоскости чертежа, т. е. когда основание принадлежит плоскости проекций или параллельно ей.

### Развертка поверхности пирамиды

На рис. 8 показано построение развертки боковой поверхности пирамиды. Для этого каким-либо методом определяется натуральная величина ребер. В данном случае она определена методом прямоугольного

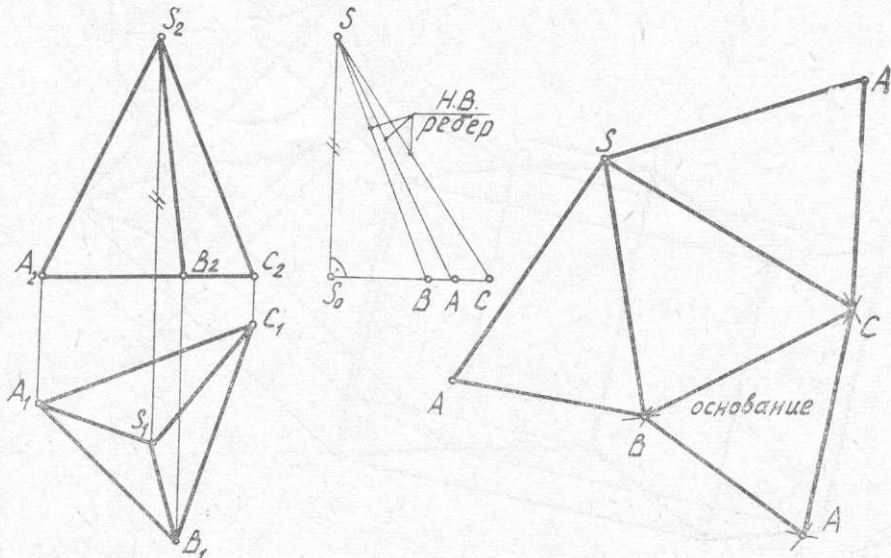


Рис. 8

треугольника. В любом месте на поле чертежа выбирается точка  $S_0$ , от которой откладываются величины горизонтальных проекций ребер  $S_0A = S_1A_1$ ,  $S_0B = S_1B_1$ ,  $S_0C = S_1C_1$ ; отрезок  $S_0S$  равен высоте пирамиды. Соединив точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  с точкой  $S$ , получим натуральные величины ребер.

Стороны основания  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  в данном примере проецируются на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину. Затем по натуральным величинам ребер и сторон основания строим треугольники  $SAB$ ,  $SBC$ ,  $SCA$ , которые в совокупности и будут представлять собой развертку боковой поверхности пирамиды. Основание  $ABC$  пристраивается к любой из граней.

## § 2. СЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТИ

Сечение поверхности вращения плоскостью строится следующим образом:

1) вводятся вспомогательные секущие плоскости частного или общего положения;

2) находятся линии пересечения вспомогательных плоскостей с данной плоскостью и поверхностью;

3) определяются общие точки, принадлежащие поверхности и секущей плоскости;

4) полученные точки соединяются плавной кривой линией, которая и определяет собой фигуру сечения.

Для поверхностей вращения вспомогательные плоскости следует выбирать так, чтобы в пересечении с ними получались либо окружности, либо прямые линии. Окружности у поверхностей вращения получаются в случае, когда секущая плоскость перпендикулярна оси вращения, а прямые, — когда секущая плоскость пересекает поверхность по прямолинейным образующим.

При пересечении поверхности вращения второго порядка плоскостью в сечении получается одна из кривых второго порядка: окружность, эллипс, парабола, гипербола, либо две пересекающиеся или параллельные прямые. Вся совокупность кривых второго порядка может быть получена пересечением конуса плоскостью, поэтому эти кривые часто называют *кривыми конических сечений*.

При пересечении поверхностей вращения плоскостью могут быть получены следующие линии второго порядка.

### Конус вращения (рис. 9)

Окружность, когда секущая плоскость перпендикулярна оси вращения;

эллипс, когда секущая плоскость наклонена к оси конуса и пересекает все образующие;

парабола, если секущая плоскость параллельна одной образующей конуса;

гипербола, если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса;

две пересекающиеся прямые, когда плоскость проходит через вершину конуса и пересекает его;

прямая, когда секущая плоскость касается конической поверхности.

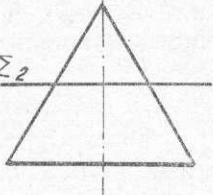
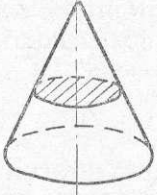
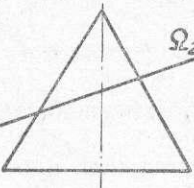
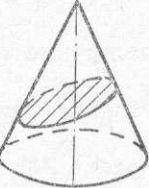
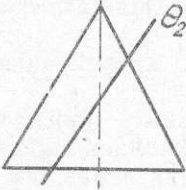
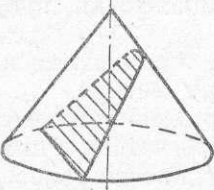
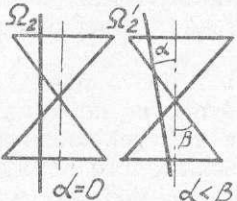
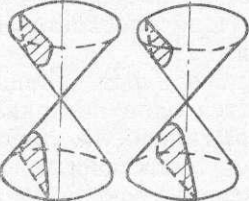
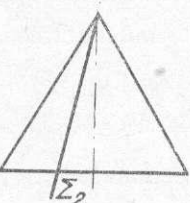
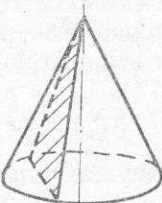
		<p>окружность</p>
		<p>эллипс</p>
		<p>парабола</p>
		<p>гипербола</p>
		<p>две пересекаю- щиеся прямые</p>

Рис. 9

### Цилиндр вращения (рис. 10)

Окружность, когда секущая плоскость перпендикулярна оси вращения;  
 эллипс, когда секущая плоскость наклонена к оси вращения;  
 две параллельные прямые, если секущая плоскость параллельна оси вращения;  
 прямая, если секущая плоскость касается поверхности;

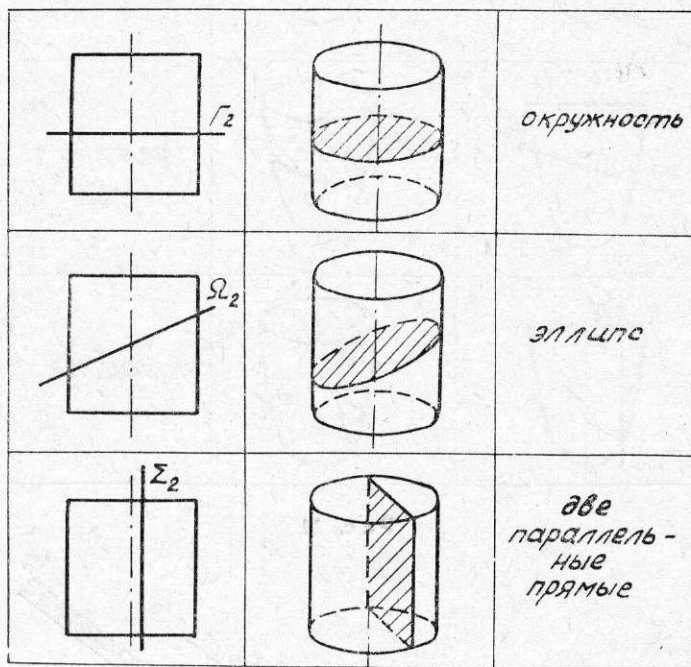


Рис. 10

### Параболоид вращения (рис. 11)

Окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения;  
 эллипс, если секущая плоскость не параллельна и не перпендикулярна оси вращения;  
 парабола, когда секущая плоскость параллельна оси вращения.

### Однополостный гиперболоид вращения (рис. 12)

Однополостный гиперболоид вращения так же, как и коническая поверхность, содержит все виды конических сечений, которые могут быть получены при следующих условиях:

окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения;  
 эллипс, если секущая плоскость пересекает все образующие поверхности;  
 гипербола, когда секущая плоскость параллельна двум образующим асимптотического конуса;  
 парабола, если секущая плоскость параллельна одной образующей асимптотического конуса;

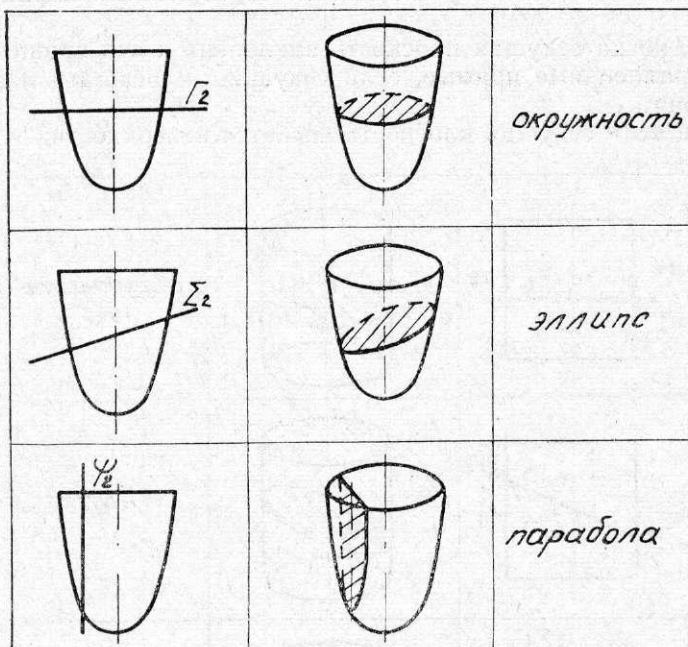


Рис. 11

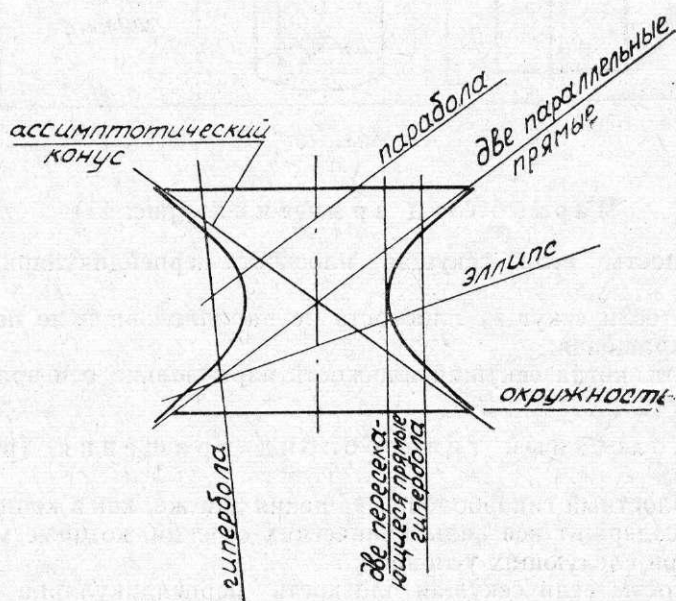


Рис. 12

две пересекающиеся прямые, когда секущая плоскость параллельна оси вращения;

две параллельные прямые, если секущая плоскость касается асимптотического конуса.

### Тор (рис. 13)

Открытый тор (кольцо) — поверхность четвертого порядка. В зависимости от положения секущей плоскости  $\Psi$  могут быть получены кривые, названия и форма которых даны на рис. 13.

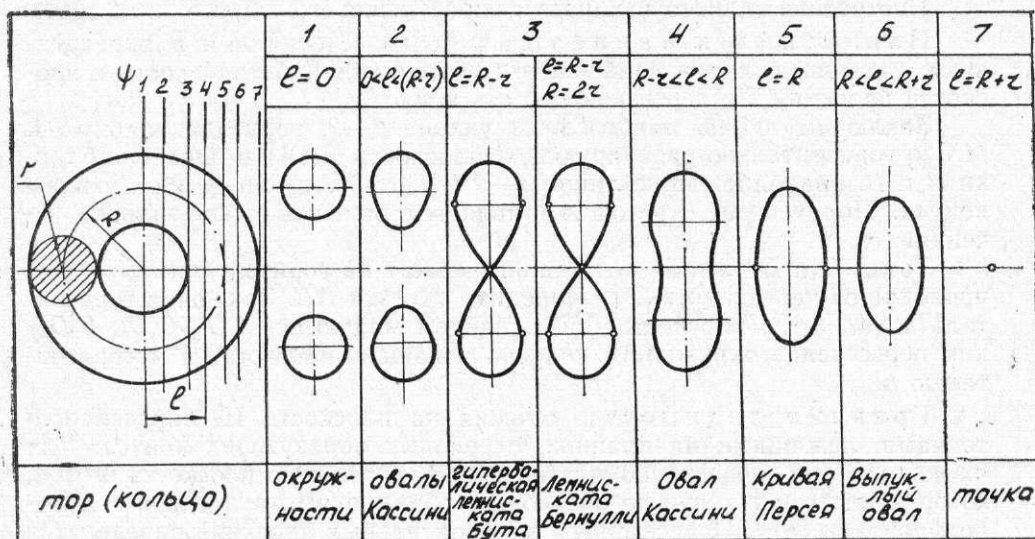


Рис. 13

При определении линии пересечения поверхности с плоскостью количество точек, которые нужны для построения этой линии, может быть различным, но независимо от их числа необходимо найти некоторые точки особого расположения, называемые опорными или характерными. Определение их рассмотрено в примере 3.

Если рассматривать кривую поверхность как гибкую нерастяжимую оболочку, то некоторые из них, постепенно деформируя, можно совместить с плоскостью без разрывов и складок. Очертание поверхности, совмещенной с плоскостью, называется *разверткой*, а сама такая поверхность — *развертывающейся*.

Основным способом построения разверток кривых развертывающихся поверхностей является способ треугольников (триангуляции). Этот способ применяют для построения разверток всех линейчатых поверхностей, кроме цилиндрических. Сущность способа треугольников заключается в том, что кривую линейчатую поверхность заменяют вписанной многогранной поверхностью с треугольными гранями, развертку которой и строят.

Развертки всевозможных цилиндрических поверхностей строят способом нормального сечения и способом раскатки.

Первый из них состоит в том, что в заданную цилиндрическую поверхность вписывают призматическую поверхность с узкими боковыми гранями, которую и развертывают по способу нормального сечения. По второму способу вписанная призматическая поверхность «раскатывается». Оба эти способа рассмотрены в § 1.

Пример 3. Построить проекции линии пересечения конуса вращения с плоскостью  $\Sigma(MNL)$  общего положения. Определить натуральную величину сечения. Построить развертку нижней отсеченной части конуса (рис. 14).

В рассматриваемом примере заданная секущая плоскость пересекает все образующие конуса, поэтому сечением конуса, согласно изложенному ранее, будет эллипс.

Построение эллипса начинаем с определения его характерных точек.

Наивысшая и наинизшая точки сечения  $A$  и  $B$  определяются с помощью линии наибольшего уклона заданной плоскости к плоскости проекции  $P_1$ , пересекающей ось конуса.

Заклучим линию наибольшего уклона  $1-2$ , перпендикулярную к  $MN$ , в горизонтально-проецирующую плоскость  $\Omega(\Omega_1)$  и определим точки  $A$  и  $B$ , принадлежащие линии  $1-2$  и соответствующим образующим конуса. Полученный отрезок  $AB$  является большой осью эллипса сечения.

Точки  $C$  и  $D$  малой оси эллипса лежат на горизонтали  $h$  ( $h_1, h_2$ ), проходящей через точку  $O$  — середину отрезка  $AB$ . Заклучив горизонталь  $h$  ( $h_1, h_2$ ) в плоскость  $\Gamma(\Gamma_2)$ , найдем малую ось  $CD$  ( $C_1D_1, C_2D_2$ ) как пересечение окружности конуса, лежащей в плоскости  $\Gamma$  с горизонталью  $h$ .

Граница видимости сечения на плоскости  $\Pi_2$  определяется точками, лежащими на крайних, очерковых образующих конуса. Для их нахождения введем вспомогательную фронтальную плоскость  $\Phi(\Phi_1)$ , которая пересечет конус по очерковым образующим, а плоскость  $\Sigma_a$  — по фронтали 3—4. Пересечением их фронтальных проекций определятся  $E$  и  $F$  — точки границы видимости.

Кроме характерных точек с помощью горизонтальной плоскости  $\Gamma'(\Gamma'_2)$ , найдены промежуточные точки  $G$  и  $K$ . Соединив полученные точки плавной кривой, найдем проекции сечения эллипса.

Видимость конуса и плоскости  $\Sigma$  относительно плоскостей проекций определяется методом конкурирующих точек.

Для определения натуральной величины сечения воспользуемся способом вращения плоскости  $\Sigma$  вокруг горизонтали  $MN$  до совмещения ее с горизонтальной плоскостью уровня, тогда все точки сечения на горизонтальной плоскости проекции переместятся по прямым, перпендикулярным  $M_1N_1$ , а радиус вращения каждой точки спроецируется в натуральную величину.

Натуральные величины радиусов вращения точек  $A$  и  $B$  найдены методом прямоугольного треугольника и отложены на соответствующем перпендикуляре к оси вращения. Полученный отрезок  $A_0B_0$  — натуральная величина большой оси эллипса. Затем через точку  $O_0$  проведена линия, перпендикулярная к  $A_0B_0$ , и на ней отложен отрезок, равный  $C_1D_1$ , который представляет собой натуральную величину малой оси эллипса. Остальные точки сечения можно построить таким же образом, как и точки  $A$  и  $B$ .

Развертка боковой поверхности прямого кругового конуса представляет собой круговой сектор с радиусом, равным длине образующей конуса  $l$ , и углом, определяемым по формуле  $\alpha = 180^\circ \frac{d}{c}$  где  $d$  — диаметр основания конуса.

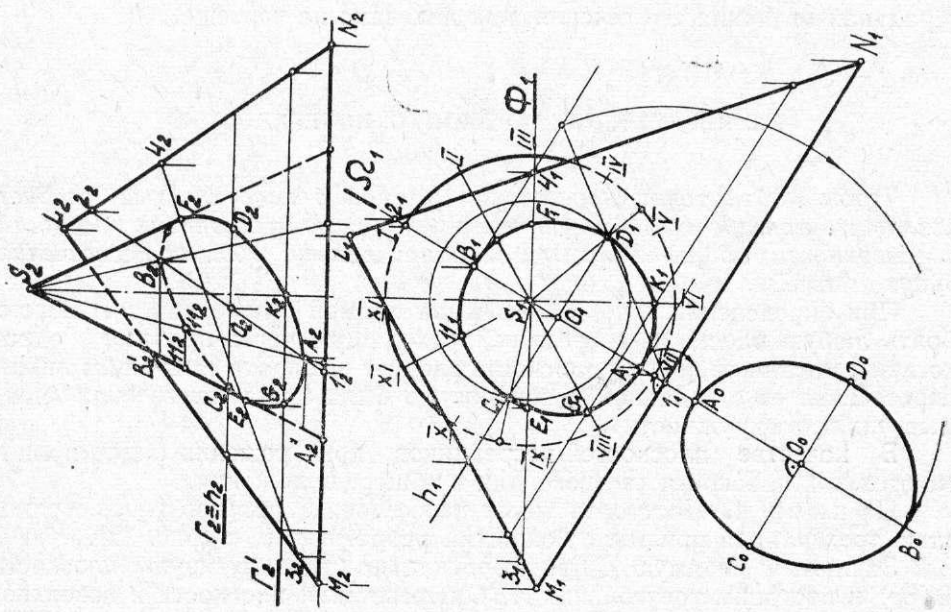
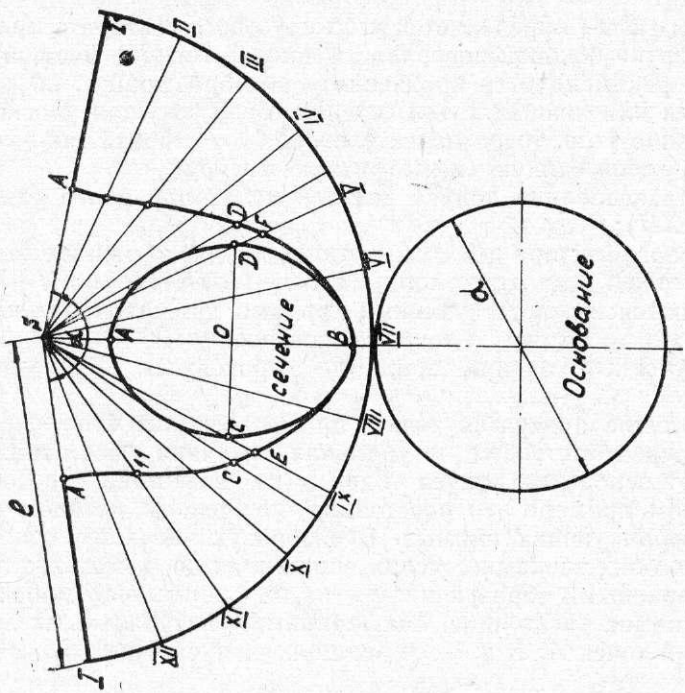


Рис. 14

Построение развертки отсеченной части конуса производится следующим образом:

1) по заданным  $d$  и  $l$  определяется угол кругового сектора  $\alpha$  и строится полная развертка боковой поверхности конуса. Разрыв боковой поверхности конуса рекомендуется производить по образующим, на которых лежат высшая или низшая точки сечения. Если секущая плоскость пересекает основание тела, то развертку необходимо строить так, чтобы она представляла собой единую симметричную фигуру;

2) окружность основания конуса делится на 12 или более равных частей (точки  $I—XII$ );

3) дуга кругового сектора делится на такое же число равных частей (в примере 12 частей). Для этого хорды дуг  $I—II$ ,  $II—III$ ,...  $XII—I$  на развертке заменяются соответствующими хордами дуг основания конуса, что обеспечивает достаточную точность построения;

4) через полученные точки и вершину  $S$  проводятся образующие  $SI—SXII$ ;

5) на образующие наносятся точки, принадлежащие фигуре сечения. Для этого определяется их натуральная величина расстояния от вершины  $S$  или от основания конуса одним из известных способов. В рассматриваемом примере эти расстояния определены методом вращения вокруг проецирующих прямых. Все образующие конуса вместе с находящимися на них точками сечения вращаются до положения, когда они станут очерковыми образующими и на их фронтальной проекции будет найдено искомое расстояние. Так, например, натуральными величинами расстояний точек  $A$ ,  $B$  и  $II$  от вершины конуса будут  $SA_2'$ ,  $SB_2'$  и  $SII_2'$ .

Если точки сечения (как, например,  $C$  и  $D$ ) не лежат на образующих  $SI—SXII$ , то их положение на развертке определяется с помощью промежуточных образующих вышеописанным способом;

6) нанесенные на развертку точки соединяются друг с другом плавной кривой линией;

7) к полученной развертке пристраивается основание конуса и натуральная величина его сечения, как показано на чертеже.

### § 3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ

*Чтобы найти точки пересечения прямой с поверхностью, следует заключить прямую в плоскость, построить линию пересечения плоскости и поверхности; общие точки для заданной прямой и линии пересечения будут искомыми.*

При определении точек пересечения прямой с поверхностью можно брать любую плоскость-посредник, проходящую через прямую, однако при решении задач эту плоскость следует выбирать так, чтобы линия пересечения ее с заданной поверхностью была простейшего вида (прямые линии и окружности).

В качестве плоскостей-посредников при решении задач принимаются как плоскости частного, так и общего положения.

Пример 4. Построить точки пересечения прямой  $d$  с поверхностью трехгранной призмы с боковыми ребрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рис. 15).

Заклучим прямую  $d$  во фронтально-проецирующую плоскость  $\Theta(\Theta_2)$  и построим треугольник  $ABC$  пересечения плоскости и поверхности. В точках  $M$  и  $K$  треугольник и прямая  $d$  пересекаются между собой, следовательно, в этих же точках прямая  $d$  пересекается с поверхностью.

При определении видимости прямой относительно поверхности можно воспользоваться видимостью граней на каждой из плоскостей проекций.

Если точка входа или выхода располагается на видимой грани, то прямая в этой области будет видимой, в противном случае она будет

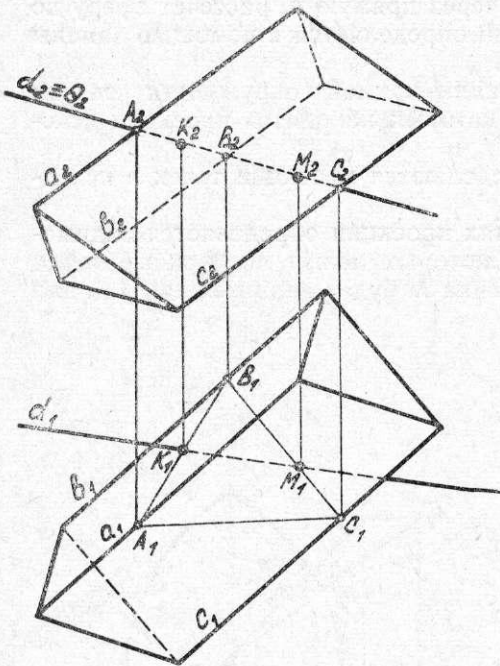


Рис. 15

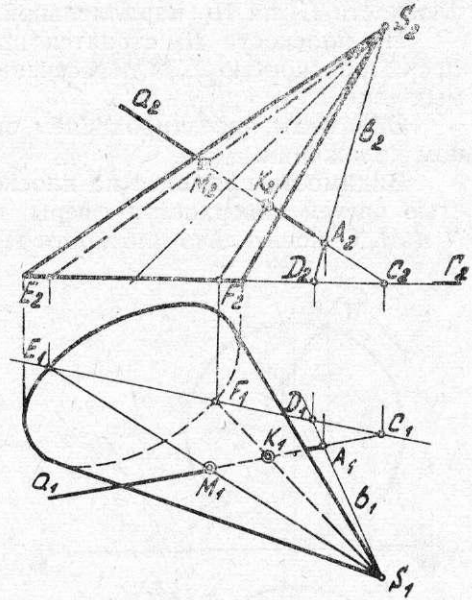


Рис. 16

невидимой. Видимость можно определить также и методом конкурирующих точек.

Пример 5. Построить точки пересечения прямой  $a$  с поверхностью наклонного конуса. Показать видимость прямой (рис. 16).

Если через прямую провести вспомогательную плоскость частного положения, то в сечении будет эллипс, построить который на чертеже затруднительно, поэтому для получения простейшего вида необходимо заданную прямую заключить в плоскость общего положения, проходящую через вершину  $S$  конуса и пересекающую его по прямолинейным образующим. Такую плоскость зададим пересекающимися прямыми, одна из которых  $a$  — заданная, а другая  $b$  — проходит через вершину  $S$ . Чтобы найти образующие, по которым плоскость  $\Sigma(a \times b)$  пересекает конус, нужно найти линию пересечения ее с плоскостью основания  $\Gamma(\Gamma_2)$ . Эта прямая  $(CD)$  определит опорные точки  $E$  и  $F$  прямолинейных образующих конуса, в пересечении которых с прямой будут найдены искомые точки  $K$  и  $M$ .

Видимость прямой определяется видимостью образующих сечения, как показано на чертеже.

При определении точек встречи прямой с наклонной цилиндрической поверхностью плоскость-посредник задается пересекающимися прямыми, одна из которых — заданная прямая, а вторая параллельна образующим цилиндра. Дальнейшее решение этой задачи аналогично рассмотренному.

Пример 6. Построить точки пересечения прямой  $a$  со сферой. Показать видимость прямой (рис. 17).

При определении точек встречи прямой с поверхностью можно избежать построения сложной линии пересечения плоскости-посредника с поверхностью, применив какой-либо из методов преобразования чертежа.

В данном примере плоскость-посредник — горизонтально-проецирующая плоскость  $\Sigma (\Sigma_1)$ , проходящая через прямую  $a$ , рассекает сферу по окружности, натуральный вид которой определяется с помощью замены плоскости  $\Pi_2$  на  $\Pi_4$ , параллельной  $\Sigma$ .

На плоскости  $\Pi_4$  строятся проекции прямой и окружности сечения сферы плоскостью  $\Sigma$ , в пересечении которых находятся проекции искомых точек.

Обратным проектированием определяются проекции точек в исходном положении.

Видимость прямой  $a$  на плоскостях проекции определяется видимостью частей поверхности сферы, на которых лежат полученные точки  $N$  и  $M$ . Относительно плоскости  $\Pi_1$  точка  $N$  будет видимой, так как она

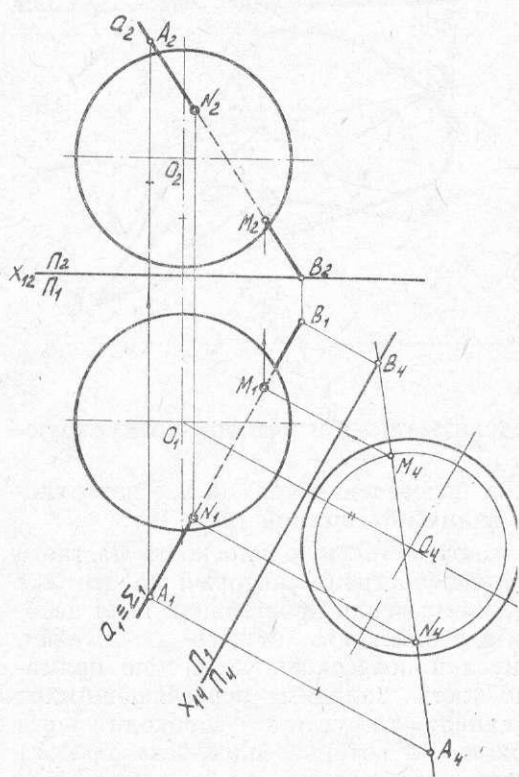


Рис. 17

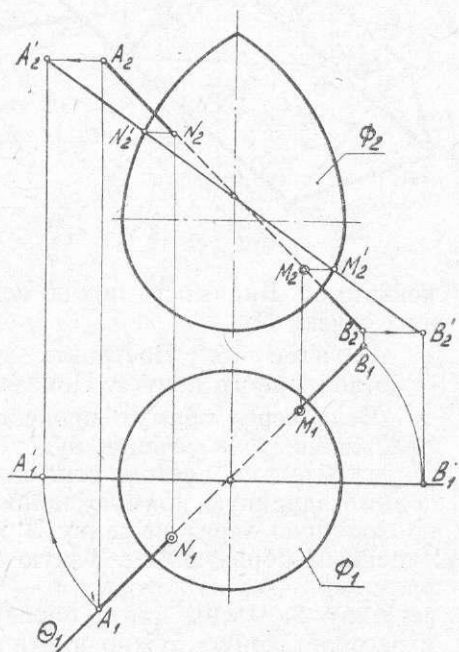


Рис. 18

лежит на верхней видимой полусфере, а точка  $M$ , лежащая на нижней полусфере, будет невидимой.

Рассуждая подобным образом о видимости прямой относительно плоскости  $\Pi_2$ , заключаем, что отрезок  $A_2N_2$  будет видимым, а отрезок  $M_2B_2$  в пределах фронтального очерка будет невидимым.

Пример 7. Построить точки пересечения прямой  $AB$  с поверхностью вращения  $\Phi$ , если прямая пересекает ось вращения (рис. 18).

Через прямую  $AB$  проводим горизонтально-проецирующую плоскость  $\Theta(\Theta_1)$ . Она пересечет поверхность по меридиану. Для определения точек пересечения прямой с этим меридианом плоскость  $\Theta$  вместе с прямой вращаем вокруг оси вращения до совмещения с главным меридианом. Прямая при этом займет положение  $A'B'$  ( $A_1'B_1'$ ;  $A_2'B_2'$ ), и на фронтальной плоскости проекций определяются точки  $N_2'$  и  $M_2'$ . Путем обратного вращения находим точки  $M$  и  $N$  пересечения прямой с поверхностью.

Определение видимости на поверхностях такого вида рассмотрено в примере 6.

#### § 4. ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ПОВЕРХНОСТИ

*Касательной плоскостью* к поверхности называется геометрическое место всех касательных к кривым линиям на поверхности, проведенным через одну из ее точек. Таким образом, для построения касательной плоскости к поверхности в какой-либо ее точке на комплексном чертеже необходимо через эту точку провести две кривые линии, принадлежащие поверхности, а затем к ним провести и касательные прямые. Эти две касательные как пересекающиеся прямые вполне определяют искомую касательную плоскость.

Касательная плоскость может иметь с поверхностью одну общую точку, как, например, в случае сферы, либо совокупность общих точек, представляющих собой некоторую линию. Для линейчатых поверхностей такой линией является ее образующая. Поэтому плоскость, касательная к линейчатой поверхности, будет определяться одной из ее образующих и прямой линией, касательной к какой-либо кривой на поверхности, проходящей через точку на этой образующей.

Основными задачами на построение плоскостей, касательных к поверхности, являются следующие:

построение касательной плоскости в точке, данной на поверхности; построение касательной плоскости, проходящей через точку, не принадлежащую поверхности;

построение касательной плоскости, параллельной данной прямой;

построение касательной плоскости, проходящей через прямую, не принадлежащую поверхности (решение этой задачи возможно для сферы, эллипсоида вращения и других подобных поверхностей лишь в случае, если прямая не пересекает поверхность; для цилиндра — когда прямая касается цилиндра или параллельна его образующим; для конуса — когда прямая проходит через вершину конуса или касается его в какой-либо точке);

построение касательной плоскости, параллельной заданной плоскости. Для цилиндра решение задачи возможно, если заданная плоскость параллельна оси цилиндра; для конуса — если в заданной плоскости лежит прямая, параллельная какой-либо одной образующей конуса.

Рассмотрим решение некоторых из указанных задач.

**Пример 8.** Через точку  $A$  на поверхности тора провести плоскость, касательную к поверхности (рис. 19).

Для построения касательной плоскости через точку  $A$  на поверхности проведем две линии — параллель  $h$  и меридиан  $m$ . Одна из линий, определяющих искомую плоскость, будет касательная  $i$  ( $t_1$ ;  $t_2$ ) к параллели  $h$  ( $h_1$ ;  $h_2$ ). Вторую касательную  $k$  к меридиану  $m$  построим следующим образом: повернем меридиан  $m$  в положение главного меридиана, при этом точка  $A$  ( $A_1$ ;  $A_2$ ) переместится в новое положение —

$A'$  ( $A_1'$ ,  $A_2'$ ). Построим касательную к главному меридиану, проходящую через точку  $A'$  и найдем ее точку пересечения  $S$  ( $S_1$ ,  $S_2$ ) с осью  $i$  ( $i_1$ ,  $i_2$ ). Затем, вращая меридиан вместе с касательной в исходное положение, найдем положение касательной  $k$  ( $k_1$ ,  $k_2$ ), проходящей через точку  $A$  и пересекающей ось  $i$  в точке  $S$ . Касательными  $t$  и  $k$  будет определяться искомая касательная плоскость к поверхности.

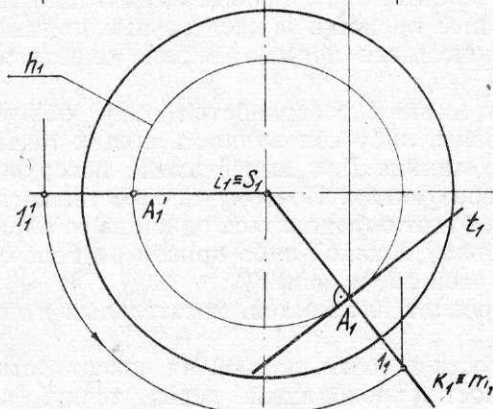
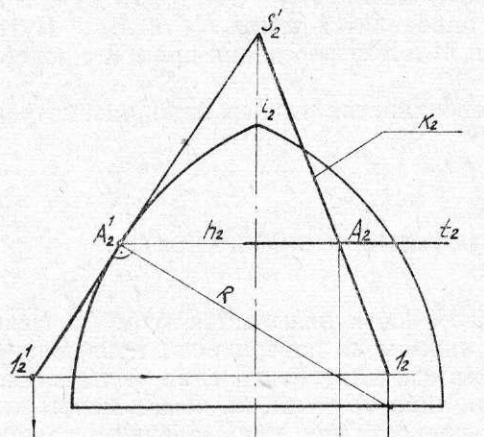


Рис. 19

этой плоскости с плоскостью  $\Gamma$  ( $\Gamma_2$ ), проходящей через основание цилиндра. После этого проведем касательные  $t$  ( $t_1$ ,  $t_2$ ) и  $k$  ( $k_1$ ,  $k_2$ ) к окружности основания, параллельные линии  $l-2$ , найдем точки касания  $A$  и  $B$ , а затем и искомые образующие  $l$  ( $l_1$ ,  $l_2$ ) и  $s$  ( $s_1$ ,  $s_2$ ). Эти образующие и соответствующие касательные будут определять собой плоскости  $\Sigma$  ( $l \times t$ ) и  $\Theta$  ( $s \times k$ ), касательные к поверхности цилиндра и параллельные прямой  $d$ .

Пример 10. Построить плоскости, касательные к сферической поверхности и параллельные плоскости  $\Omega$  ( $l$ ,  $C$ ) (рис. 21). Плоскость, касательная к сферической поверхности, перпендикулярна к радиусу, проведенному из центра сферы в точку касания. Направление этого радиуса определяется перпендикуляром к заданной плоскости  $\Omega$ . Исходя из этого, искомую плоскость построим следующим образом:

1) в плоскости  $\Omega$  строим горизонталь  $h$  и фронталь  $f$ , проходящие через точку  $C$ ;

2) через центр сферы  $O$  ( $O_1$ ,  $O_2$ ) проведем прямую линию  $O-3$  ( $O_1-3_1$ ;  $O_2-3_2$ ), перпендикулярную к плоскости  $\Omega$ , и найдем точки  $K$  ( $K_1$ ;  $K_2$ ) и  $L$  ( $L_1$ ;  $L_2$ ) ее пересечения со сферой. Эти точки легко найдутся преобразованием комплексного чертежа — вращением сферы и

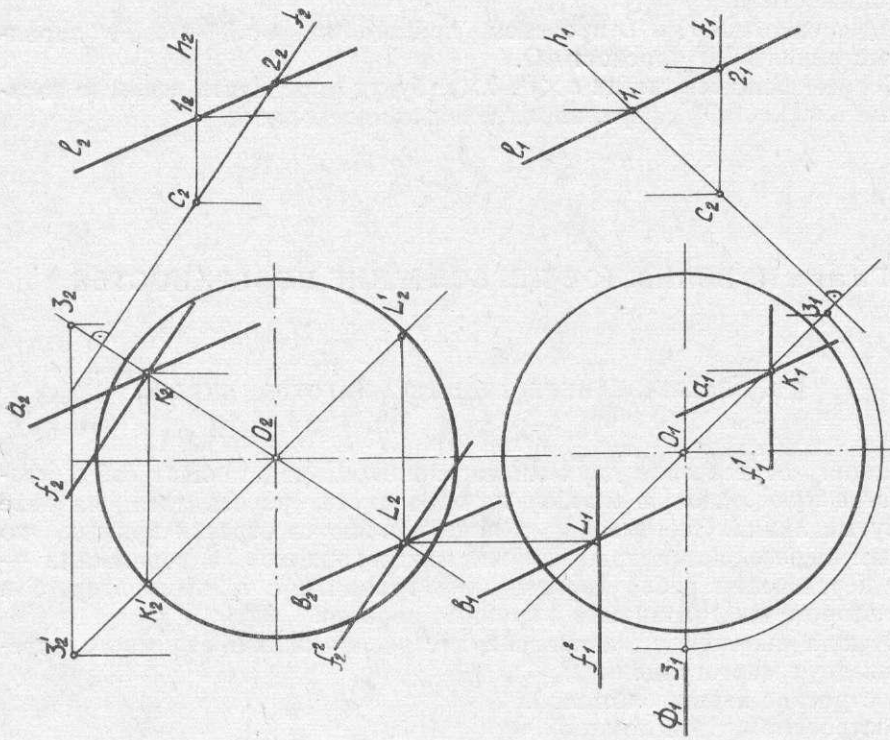


Рис. 21

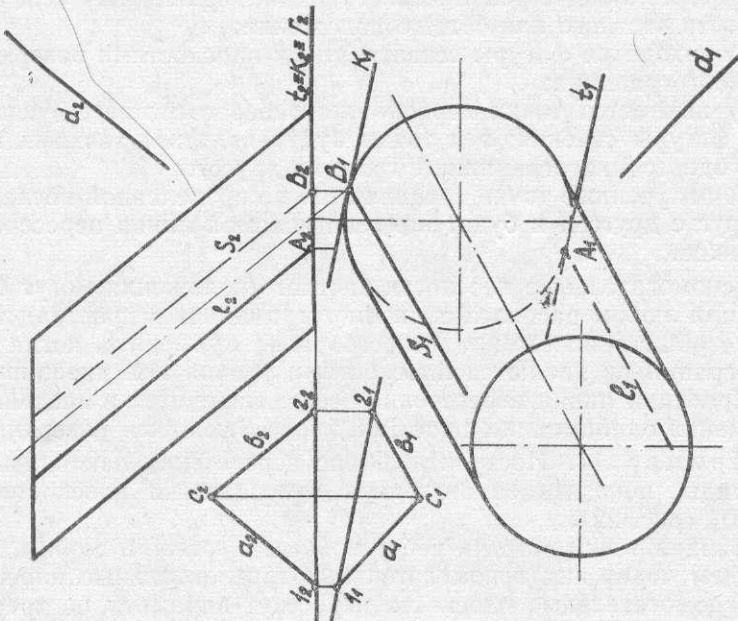


Рис. 20

линии  $O—3$  вокруг оси, проходящей через центр сферы перпендикулярно к плоскости  $\Pi_1$ ;

3) через точки  $K$  и  $L$  проведем прямые линии  $a, f^1$  и  $b, f^2$ , параллельные линиям  $l, f$  плоскости  $\Omega$ .

Пересекающиеся линии  $a \times f^1, b \times f^2$  будут определять искомые касательные плоскости к сфере, параллельные плоскости  $\Omega$ .

## Глава II. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### § 5. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

Линия пересечения двух многогранников представляет собой *пространственную ломаную линию*, которая может распадаться на две замкнутые линии. Звеньями этих линий являются отрезки прямых, по которым пересекаются грани обоих многогранников, а вершинами — точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого.

Отсюда вытекают два способа построения линий взаимного пересечения двух многогранников:

- построение вершин ломаной,
- построение сторон ломаной.

По второму способу построение сводится к многократному решению задачи о пересечении двух плоскостей. На практике предпочитают определять вершины линии пересечения, а ее стороны находят соединением соответствующих вершин. В этом случае:

1) через каждое ребро многогранников проводятся вспомогательные плоскости частного или общего положения;

2) находятся фигуры сечения этими плоскостями поверхностей другого многогранника;

3) находятся точки пересечения ребер с соответствующими сторонами фигуры сечения; эти точки будут являться точками пересечения ребер одного многогранника с гранями другого;

4) полученные точки соединяются в определенной последовательности друг с другом, и будет найдена искомая линия пересечения многогранников.

Вспомогательные плоскости частного положения могут быть применены при любом расположении многогранников в пространстве; плоскости же общего положения целесообразно применять, когда основания многогранников являются плоскостями уровня или проецирующими.

Проекция линии пересечения всегда находится в пределах площади наложения одноименных проекций пересекающихся поверхностей.

**Пример 11.** Построить линию пересечения наклонных призмы и пирамиды, показать ее видимость относительно плоскостей проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (рис. 22).

Найдем точки встречи ребер призмы с гранями пирамиды, для чего проведем через них вспомогательные горизонтальные плоскости  $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ . Вспомогательные плоскости пересекут пирамиду по треугольникам, в пересечении которых с ребрами призмы получим искомые точки. По расположению горизонтальных проекций ребер и треугольников видно.

что ребра  $KF$  и  $DM$  не пересекают пирамиду, а ребро  $EN$  входит в грань  $SAC$  в точке  $1$  и выходит из грани  $SBC$  в точке  $2$ .

Найдем точки встречи ребер пирамиды с гранями призмы, для чего через эти ребра проведем фронтально-проецирующие плоскости  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$ . Построим треугольники, по которым плоскости пересекут призму,

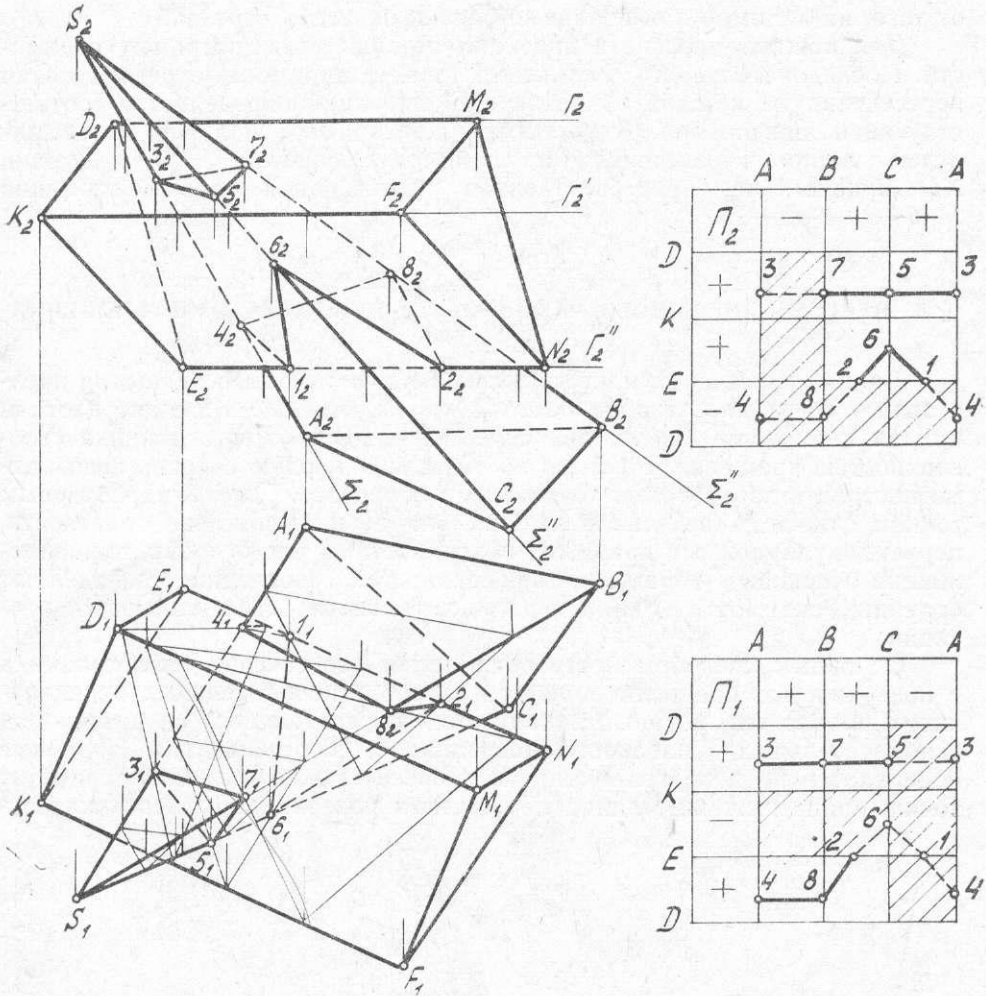


Рис. 22

а затем найдем точки пересечения ребер пирамиды с этими треугольниками.

В пересечении горизонтальных проекций этих элементов получим следующие точки:  $3$  и  $4$  — пересеченные ребра  $SA$  с гранями  $DK$  и  $DE$ ,  $5$  и  $6$  — ребра  $SC$  с гранями  $DK$  и  $KE$ ,  $7$  и  $8$  — ребра  $SB$  с гранями  $DK$  и  $DE$ .

Полученные точки наносим на диаграмму, которая определит последовательность их соединения и видимость звеньев линии пересечения.

Для построения диаграммы проводим ряд вертикальных и горизонтальных линий, соответствующих ребрам заданных многогранников. Полученные прямоугольники представляют собой развернутые и наложенные друг на друга грани многогранников. На диаграмме указыва-

ется плоскость проекций, для которой она предназначена, обозначаются ребра. На гранях ставят знак «+» или «-» в зависимости от их видимости. На диаграмму наносятся точки линии пересечения с учетом их принадлежности определенным ребрам и граням. Точки, расположенные на одной грани, в пределах одного квадрата диаграммы соединяют друг с другом сплошной основной или штриховой линией в зависимости от того, на видимой или невидимой грани оказался отрезок.

Для каждой плоскости проекций строим свою диаграмму видимости. Последовательность соединения точек и видимость отрезков линии пересечения на каждой из плоскостей проекций определяется соответствующей диаграммой. В рассмотренном примере получим две замкнутые линии пересечения: плоский треугольник  $3-7-5-3$  в грани  $KD$  призмы и пространственная пятизвенная ломаная линия  $1-6-2-8-4-1$ .

## § 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ С ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

Линия пересечения многогранников с поверхностью вращения представляет совокупность ряда плоских кривых линий. Каждая плоская кривая линия, являясь линией пересечения грани многогранника с поверхностью вращения, строится по точкам. В первую очередь необходимо построить характерные точки, а затем произвольные. К характерным точкам относятся высшая и низшая точки относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения поверхности, а также точки, принадлежащие очерковым образующим поверхностей. Последние определяют границы видимости линии пересечения относительно плоскостей проекций.

Основным способом построения линии пересечения многогранника с поверхностью вращения является способ вспомогательных проецирующих плоскостей, который заключается в следующем: вводится ряд вспомогательных плоскостей-посредников, пересекающих заданные поверхности по некоторым линиям. Пересечение этих линий определит точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей. Вспомогатель-

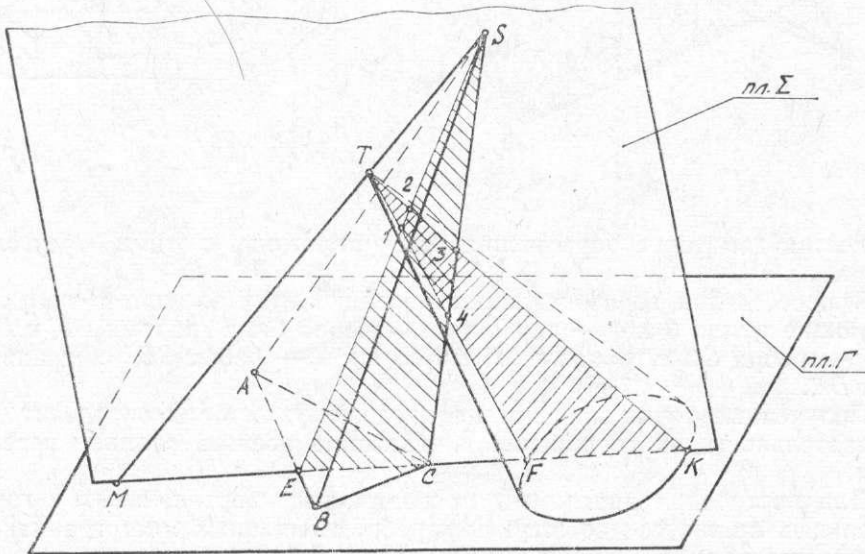


Рис. 23

ные плоскости выбирают так, чтобы они пересекали поверхности вращения по простейшим линиям — прямым или окружностям. В качестве вспомогательных можно воспользоваться и плоскостями общего положения, особенно в тех случаях, когда основания обеих поверхностей находятся в одной плоскости уровня или являются проецирующими. Применение плоскостей общего положения дает возможность провести предварительный анализ и без специальных графических построений установить, какие ребра или образующие двух поверхностей имеют общие точки, что значительно упрощает решение задач.

При выборе плоскостей общего положения необходимо обращать внимание на то, чтобы они пересекали поверхности вращения по образующим. Возможны следующие варианты пересечения:

1. Пересекаются пирамида и конус (рис. 23).

В этом случае вспомогательные плоскости необходимо проводить через прямую  $ST$ , соединяющую вершины плоскостей. Одна из таких плоскостей—плоскость  $\Sigma$  ( $ST \times SC$ )—проведена через указанную прямую и ребро  $SC$  пирамиды. Обозначим плоскость оснований поверхностей через  $\Gamma$  и построим линию  $MC$  пересечения ее с плоскостью  $\Sigma$ . Получим точки  $E, C, F, K$  на основаниях поверхностей и сами образующие  $SE, SC, TF$  и  $TK$ , в пересечении которых определяются точки 1, 2, 3, 4 искомой линии пересечения заданных поверхностей. Изложенным методом можно строить также линию пересечения двух пирамид или двух конусов.

2. Пересекаются пирамида и цилиндр (рис. 24).

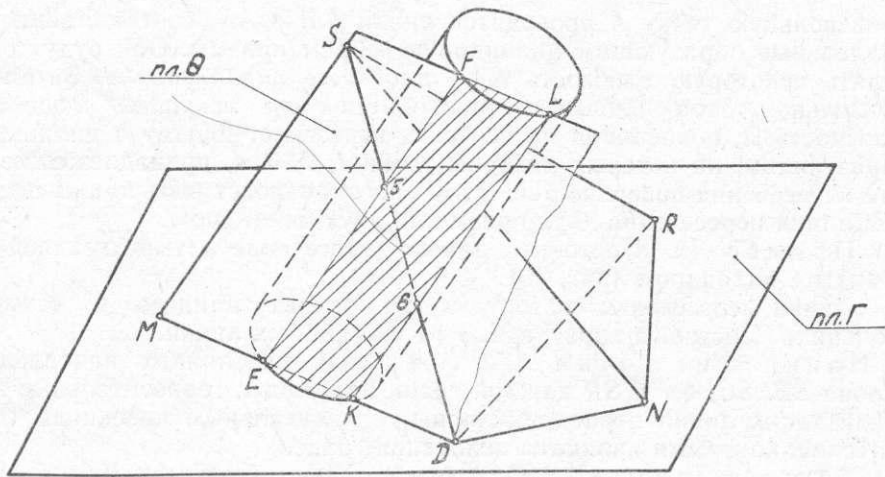


Рис. 24

В этом случае плоскости общего положения необходимо проводить через прямую  $SM$ , проходящую через вершину пирамиды параллельно образующим цилиндра. На чертеже через эту прямую и ребро пирамиды  $SD$  проведена плоскость  $\Theta$ , построена прямая  $MD$  пересечения этой плоскости с плоскостью  $\Gamma$  оснований поверхностей, а затем и образующие  $EF$  и  $KL$ , по которым плоскость  $\Theta$  пересекает цилиндрическую поверхность. В пересечении этих образующих получены точки 5, 6 искомой линии пересечения.

Подобным образом могут быть также построены линии пересечения пирамиды с призмой, конуса с цилиндром и конуса с призмой.

### 3. Пересекаются призма и цилиндр (рис. 25).

Чтобы вспомогательные плоскости пересекали заданные поверхности по образующим, они должны быть параллельны им. Для определения положения вспомогательных плоскостей в пространстве через

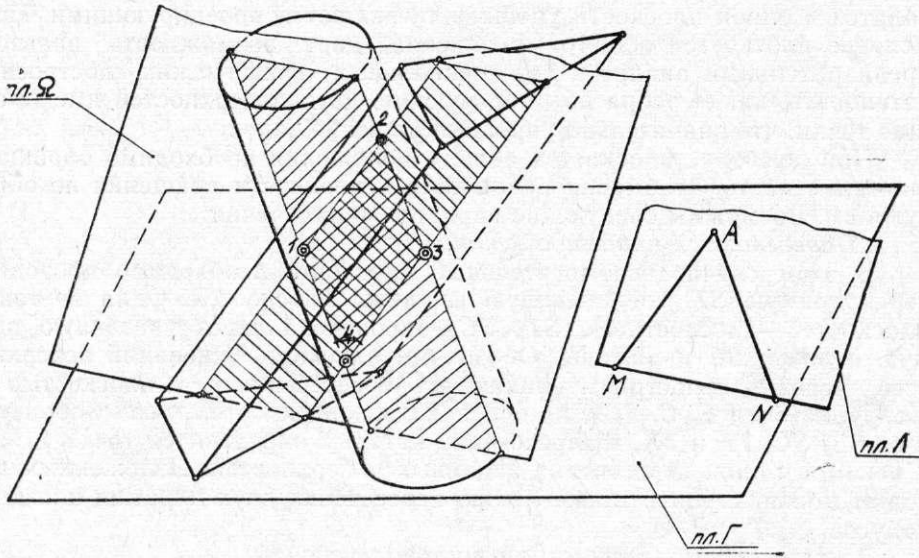


Рис. 25

произвольную точку  $A$  проводятся линии  $AM$  и  $AN$ , соответственно параллельные образующим цилиндра и ребрам призмы. Они будут определять некоторую плоскость  $A$  — *плоскость параллелизма*. Затем параллельно этой плоскости проводится ряд секущих плоскостей. Плоскость  $\Omega$ , показанная на чертеже, пересекает призму и цилиндр по образующим, на которых найдены точки  $1, 2, 3, 4$ , принадлежащие линии пересечения поверхностей. Этим способом могут быть также построены линии пересечения двух призм или двух цилиндров.

**Пример 12.** Построить линию пересечения четырехгранной пирамиды с цилиндром (рис. 26).

Линия пересечения состоит из дуг четырех эллипсов и четырехугольника. Построим характерные точки искомого линий.

Наиниžшие точки  $1, 2, 3, 4$  лежат на линиях наибольшего уклона  $SE, SO, SP$  и  $SR$  каждой грани пирамиды; горизонтальные проекции таких линий перпендикулярны горизонтальным проекциям горизонталей, которыми являются основания граней.

Точки видимости  $5, 6$  относительно плоскости  $\Pi_2$  и  $7, 8$  — относительно плоскости  $\Pi_3$  являются точками пересечения очерковых фронтальных и профильных образующих цилиндра с гранями пирамиды. Для построения этих точек через очерковые образующие цилиндра проведены плоскости-посредники  $\Phi$  ( $\Phi_1$ ) и  $\Psi$  ( $\Psi_1, \Psi_2$ ), пересекающие пирамиду по образующим  $SE, SF, SK$  и  $SL$ . В пересечении этих образующих пирамиды с очерковыми образующими цилиндра определяются точки видимости. При построении точек  $7$  и  $8$  применено вращение образующих  $SL$  и  $SF$  вокруг оси цилиндра до параллельности их плоскости  $\Pi_2$ .

Границы эллипсов — точки  $9, 10, 11, 12$  — являются точками пересечения ребер пирамиды с цилиндром. Их горизонтальные проекции определяются в пересечении горизонтальных проекций ребер с окружностью цилиндра, а затем находятся фронтальные проекции.

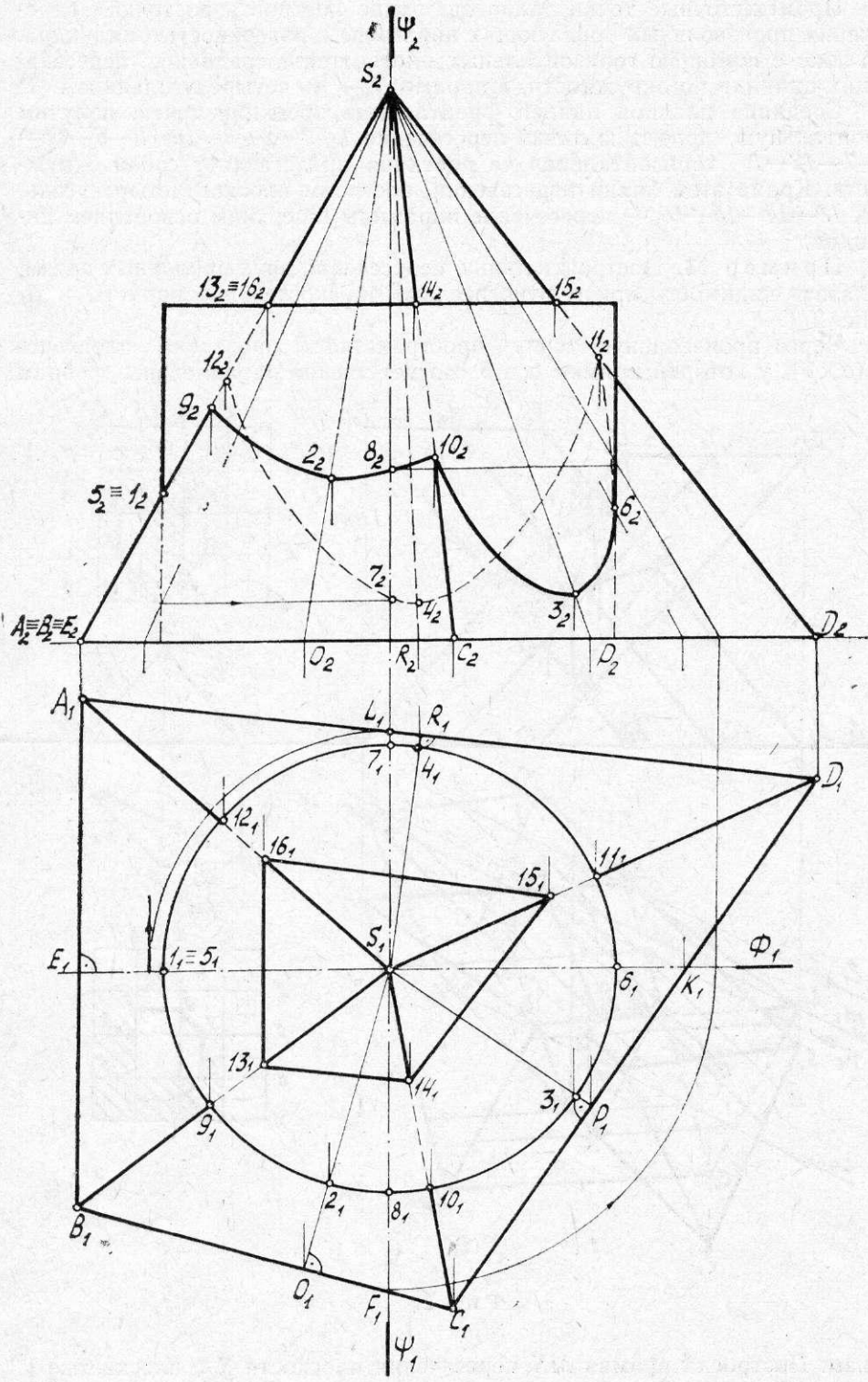


Рис. 26

Промежуточные точки эллипсов можно построить по точкам пересечения произвольных образующих пирамиды с поверхностью цилиндра, а также с помощью горизонтальных плоскостей-посредников, пересекающих цилиндр по окружности, а пирамиду — по четырехугольникам.

Соединив плавной линией фронтальные проекции точек, получим фронтальную проекцию линии пересечения  $1-9-2-8-10-3-6-11-4-7-12-1$ ; горизонтальная ее проекция представляет собой окружность. Кроме этой линии пересечения, построим плоский четырехугольник  $13-14-15-16$  — пересечение пирамиды с верхним основанием цилиндра.

**Пример 13.** Построить линию пересечения двух наклонных призм, показать видимость призм относительно плоскостей проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (рис. 27).

Через произвольную точку пространства  $R$  проведена плоскость  $\Sigma$  ( $a \times b$ ), у которой прямые  $a$  и  $b$  соответственно параллельны ребрам

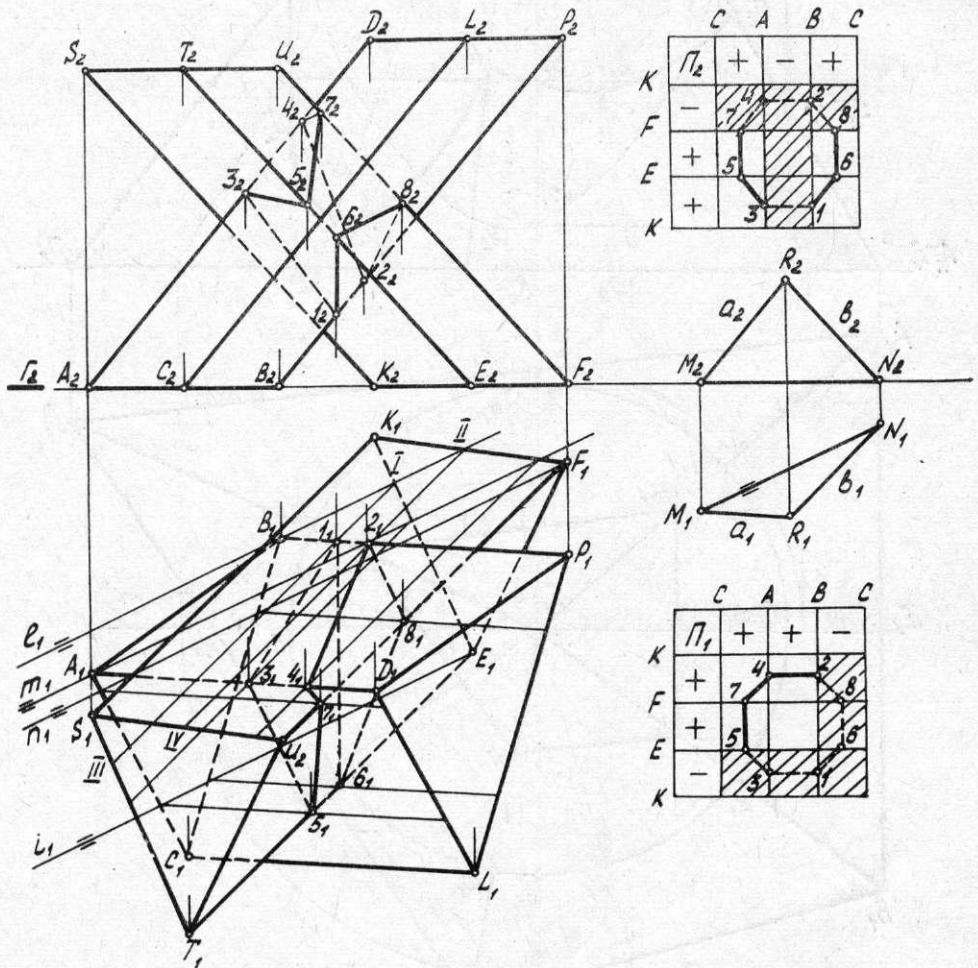


Рис. 27

призм. Построена прямая  $MN$  пересечения плоскости  $\Sigma$  с плоскостью  $\Gamma$  оснований призм. Вспомогательные плоскости  $\Theta$  ( $l \times BP$ ),  $\Lambda$  ( $m \times AD$ ),  $\Omega$  ( $n \times FU$ ),  $\Delta$  ( $i \times ET$ ), параллельные плоскости  $\Sigma$ , будут пересекать призмы по образующим, а плоскость  $\Gamma$  по прямым, параллельным пря-

мой  $MN$ . Так, плоскость  $\Theta$ , проходящая через ребро  $BP$  первой призмы, пересекает вторую призму по образующим  $I-III$ ,  $II-IV$ , на которых в пересечении с ребром  $BP$  определяются точки 1 и 2.

Аналогично находим точки 3, 4, 5, 6, 7, 8. Проведя прямые, параллельные прямой  $MN$ , через основания ребер  $KS$  и  $CL$ , видим, что эти прямые не пересекают основания второго многогранника. Значит, ребра  $KS$  и  $CL$  не имеют общих точек с другим многогранником.

Полученные точки наносим на диаграммы, пользуясь которыми соединяем фронтальные и горизонтальные проекции этих точек на комплексном чертеже и показываем видимость линии пересечения  $4-2-8-6-1-3-5-7-4$ .

## § 7. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Линией пересечения поверхностей вращения является пространственная кривая, иногда распадающаяся на плоские кривые и прямые линии.

Определение линии пересечения поверхностей вращения осуществляется так же, как и других поверхностей, при помощи посредников, в качестве которых берутся плоскости или сферы. Условия, при которых выбираются те или иные посредники, рассматриваются в примерах 14, 15, 16.

Линия пересечения имеет характерные точки, с которых и следует начинать построение. К таким точкам относятся:

- 1) точки, лежащие на главном меридиане;
- 2) точки, лежащие на экваторе;
- 3) точки, принадлежащие фронтальному и горизонтальному очерку поверхностей;
- 4) высшая и низшая точки относительно плоскости, перпендикулярной оси поверхности вращения.

Характерные точки позволяют видеть, в каких границах можно изменять положение вспомогательных секущих поверхностей (плоскостей) для определения произвольных точек линии пересечения.

При построении линии пересечения поверхностей следует обратить внимание на то, что ее проекции должны лежать в области наложения проекций пересекающихся поверхностей.

**Пример 14.** Построить линию пересечения двух конусов с вершинами  $S$  и  $T$ . Показать видимость (рис. 28).

Даны две поверхности вращения, у которых оси и главные меридиальные плоскости параллельны. Задача решается методом секущих плоскостей.

Наивысшая точка  $A$  линии пересечения лежит в плоскости  $\Sigma$  ( $\Sigma_1$ ) — общей меридиальной плоскости двух тел. Повернем плоскость  $\Sigma$  вокруг оси конуса с вершиной  $S$  до положения, параллельного плоскости  $\Pi_2$ , тогда вершина  $T$  займет положение  $T'$  ( $T'_1, T'_2$ ), а меридианы, лежащие в плоскости  $\Sigma$ , станут главными и определяют в своем пересечении повернутое положение искомой точки  $A'$  ( $A'_1, A'_2$ ). Обратным вращением точки  $A'$  определяем точку  $A$  ( $A_1, A_2$ ) — высшую точку линии пересечения. Окружности основания конусов, лежащие в одной плоскости  $\Gamma$ , в пересечении дадут точки  $E$  и  $F$  — нижние точки линии пересечения.

Промежуточные точки  $1_1; 2_1; 3_1; 4_1$ , построенные с помощью плоскостей  $\Gamma', \Gamma''$ , определяют горизонтальную проекцию линии пересечения, на которой находятся точки  $C_1$  и  $D_1$ , лежащие на горизонтальной проекции главных меридианов поверхностей.

Видимость линии пересечения на плоскости  $\Pi_2$  определяется главным меридианом конуса с вершиной  $T$ , следовательно, в точке  $C_2$  видимость линии пересечения изменится. Строим фронтальную проекцию линии пересечения с учетом видимости.

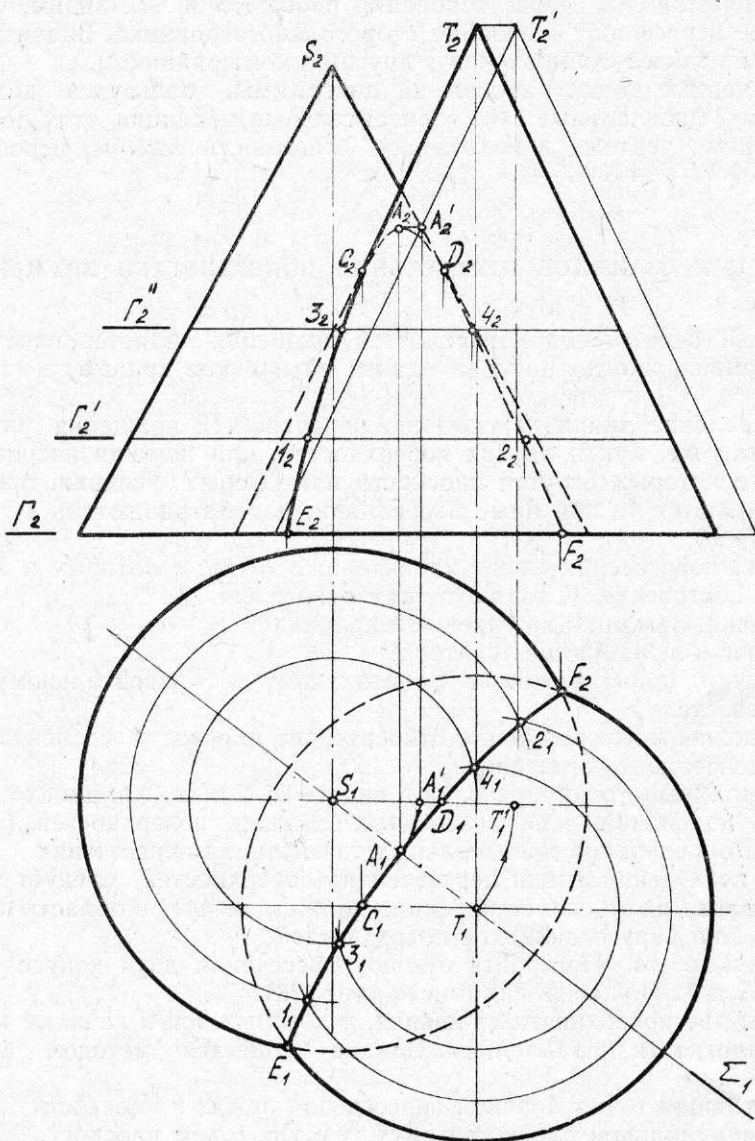


Рис. 28

Пример 15. Построить линию пересечения двух поверхностей вращения: цилиндра и усеченного конуса (рис. 29).

Если две поверхности вращения, оси которых пересекаются, имеют общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций, то для определения линии их пересечения пользуются *методом концентрических сфер*.

Точка пересечения осей поверхностей определит центр сфер-посредников.

Высшая точка  $A$  и низшая точка  $B$  определяются в этом случае, как пересечение главных меридианов.

Другие точки линии пересечения определяются следующим образом. Из центра  $O$  проводим сферу радиусом  $R$ . Эта сфера-посредник

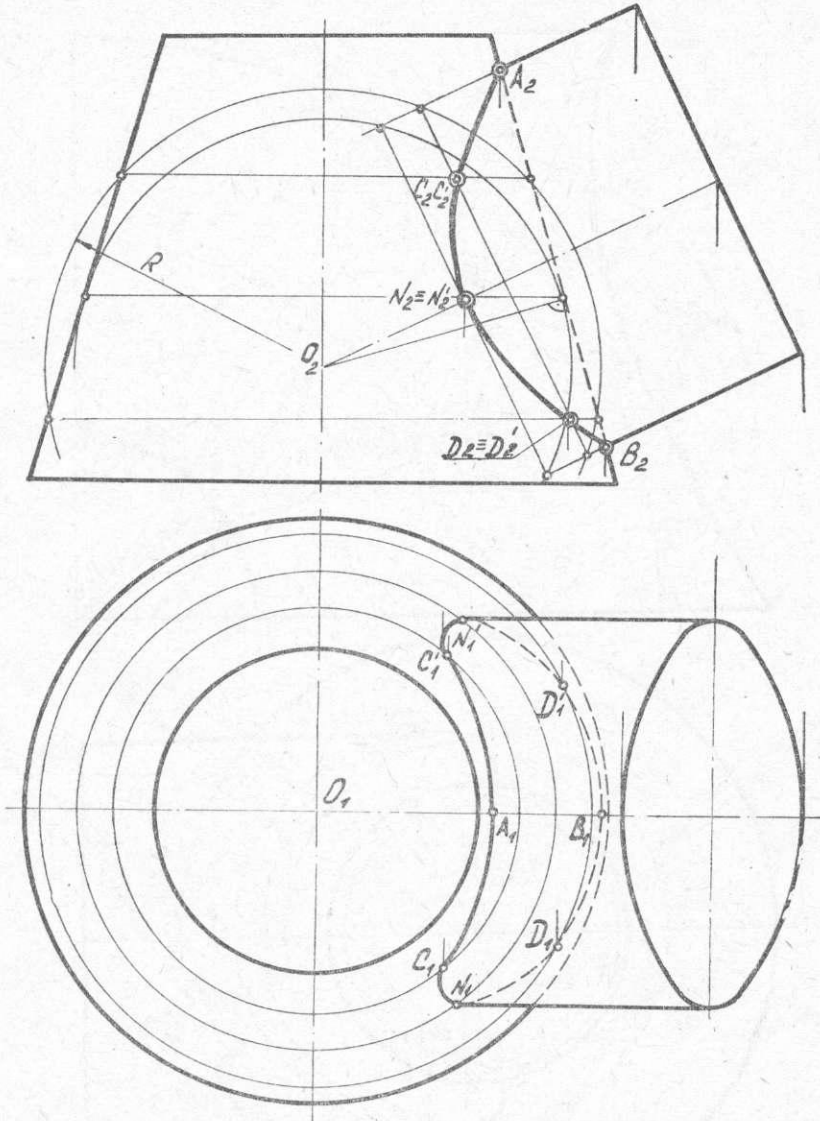


Рис. 29

пересекает заданные поверхности вращения по окружностям, которые на фронтальной плоскости изобразятся отрезками прямых. Пересечение этих отрезков определит точки пересечения окружностей, лежащих на различных поверхностях ( $CC'$  и  $DD'$ ), а следовательно, и точки искомой линии пересечения.

Изменяя радиус  $R$  сферы-посредника, можно получить ряд точек линии пересечения. Сфера-посредник, вписанная в одну из поверхностей, определит характерные точки  $N, N'$ , наиболее удаленные от основания цилиндра.

Горизонтальная проекция линии пересечения определяется построением параллелей, на которых лежат точки линии пересечения.

Пример 16. Построить линию пересечения однополостного гиперболоида и отсека тора — кольца (рис. 30).

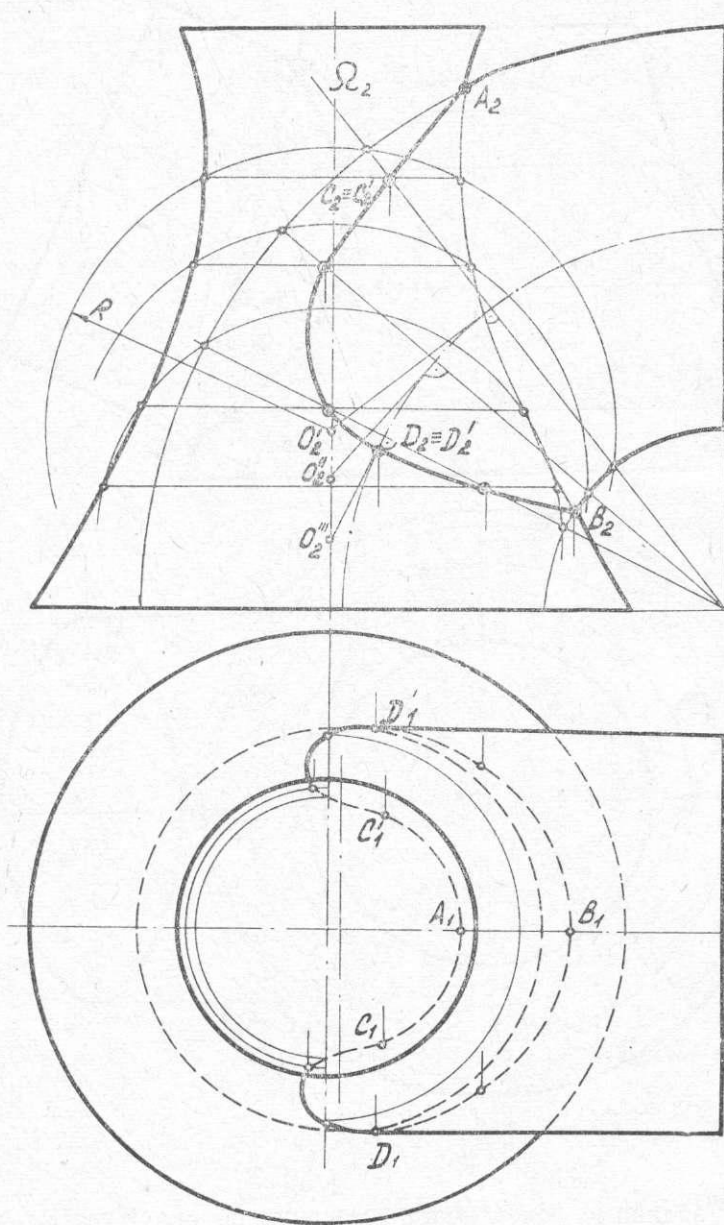


Рис. 30

Заданные поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси поверхностей вращения не пересекаются. Каждая из поверхностей имеет семейство окружностей, которые на фронтальную плоскость проецируются в виде отрезков прямой. В этом случае для определения линии пересечения пользуются *эксцентрическими сферами-посредниками*.

Прежде всего определяем опорные точки — точки пересечения очерковых образующих  $A$  и  $B$ .

Для определения промежуточных точек проводим через ось вращения тора фронтально-проецирующую плоскость  $\Omega$  ( $\Omega_2$ ), которая пересечет его по окружности. Центр сферы, пересекающей тор по этой окружности, находится на перпендикуляре, восстановленном из центра окружности к плоскости  $\Omega$ .

Для пересечения однополостного гиперboloида вспомогательной сферой по окружности надо, чтобы центр этой сферы находился на оси вращения гиперboloида. Точка  $O'$  пересечения перпендикуляра с осью вращения гиперboloида является центром вспомогательной сферы соответствующего радиуса  $R$ . Такая вспомогательная секущая сфера пересечет кольцо и гиперboloид по окружностям, фронтальные проекции которых — отрезки прямых. Точки пересечения этих окружностей принадлежат искомой линии пересечения поверхностей.

Аналогично определяются другие точки линии пересечения. Вспомогательные сферы имеют при этом различные центры  $O''$ ,  $O'''$  на оси вращения гиперboloида.

Построим по найденным точкам фронтальную проекцию линии пересечения, определяем  $D_2$  и  $D_2'$  — точки ее пересечения с фронтальными проекциями очерковых линий тора относительно плоскости  $\Pi_1$ . Горизонтальные проекции этих точек  $D_1$  и  $D_1'$  определяют границу видимости линии пересечения на плоскости  $\Pi_1$ .

Горизонтальные проекции промежуточных точек строим, пользуясь параллелями поверхностей, которые проецируются на горизонтальную плоскость проекций в виде окружностей.

### Глава III. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

#### § 8. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Для улучшения наглядности изображений геометрических фигур и тел на плоскостях проекций применяется *аксонометрическое проецирование*. Сущность его состоит в том, что проецируемый объект, ориентированный определенным образом относительно ортогональных плоскостей проекций, методом параллельного проецирования изображается на специальной плоскости, называемой *аксонометрической или картинной плоскостью проекций*.

Пусть дана точка  $A$ , заданная относительно ортогональных плоскостей проекций своими координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Проецируем точку вместе с ее проекциями  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и осями  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$  по направлению  $s$  на произвольно выбранную плоскость  $\Pi'$  (рис. 31). На этой плоскости получим аксонометрическое изображение, где оси  $o'x'$ ,  $o'y'$ ,  $o'z'$  будут называться *аксонометрическими осями*, точка  $O'$  — *началом аксонометрических координат*, точка  $A'$  — аксонометрической проекцией точки  $A$ ;  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  — аксонометрическими координатами. Отрезки прямых линий, параллельные ортогональным осям проекций, при их проецировании на плоскость  $\Pi'$  изменяют свою величину. Мерой их искажения могут служить отношения аксонометрических координат к соответствующим

ортогональным координатам, называемые *коэффициентами или показателями искажений*.

Различают три коэффициента искажений:

$$p = \frac{A' A_3^k}{A A_3} = \frac{x'}{x} \text{ — в направлении оси } ox;$$

$$q = \frac{A' A_2^k}{A A_2} = \frac{y'}{y} \text{ — в направлении оси } oy;$$

$$r = \frac{A' A_1^k}{A A_1} = \frac{z'}{z} \text{ — в направлении оси } oz.$$

В зависимости от величины угла наклона проецирующего луча  $\varphi$  к аксонометрической плоскости различают *косоугольную аксонометрию*,

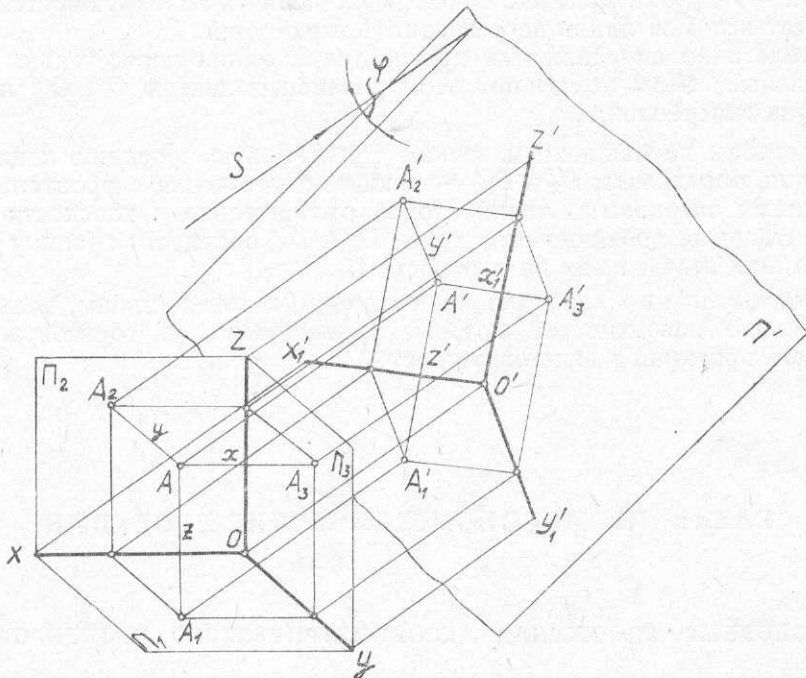


Рис. 31

если  $\varphi \neq 90^\circ$ , и *прямоугольную*, если  $\varphi = 90^\circ$ . Каждая из этих аксонометрических проекций может быть:

а) *изометрической*, если все три коэффициента искажения равны между собой:

$$p = q = r;$$

б) *диметрической*, если из трех коэффициентов искажения два равны друг другу, например:

$$p = r, q = p, r \neq q;$$

в) *триметрической*, если все три коэффициента не равны между собой:

$$p \neq q, q \neq r, r \neq p.$$

На практике при построении изображений наибольшее распространение получили прямоугольная изометрия и диметрия, а также косо-

угольная фронтальная диметрия, являющиеся стандартными аксонометрическими системами.

*Прямоугольная изометрия и диметрия.* В теории аксонометрического проецирования доказывается, что для прямоугольной аксонометрии справедливы следующие положения:

1. Связь между коэффициентами искажения выражается зависимостью

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2;$$

для прямоугольной изометрии, у которой  $p = q = r$ ,  $3p^2 = 2$ ,

$$p = q = r = 0,82;$$

для прямоугольной диметрии, у которой  $p = r$ ,  $q = 0,5p$ ,

$$2,25p^2 = 2, \quad p = r = 0,94, \quad q = 0,47.$$

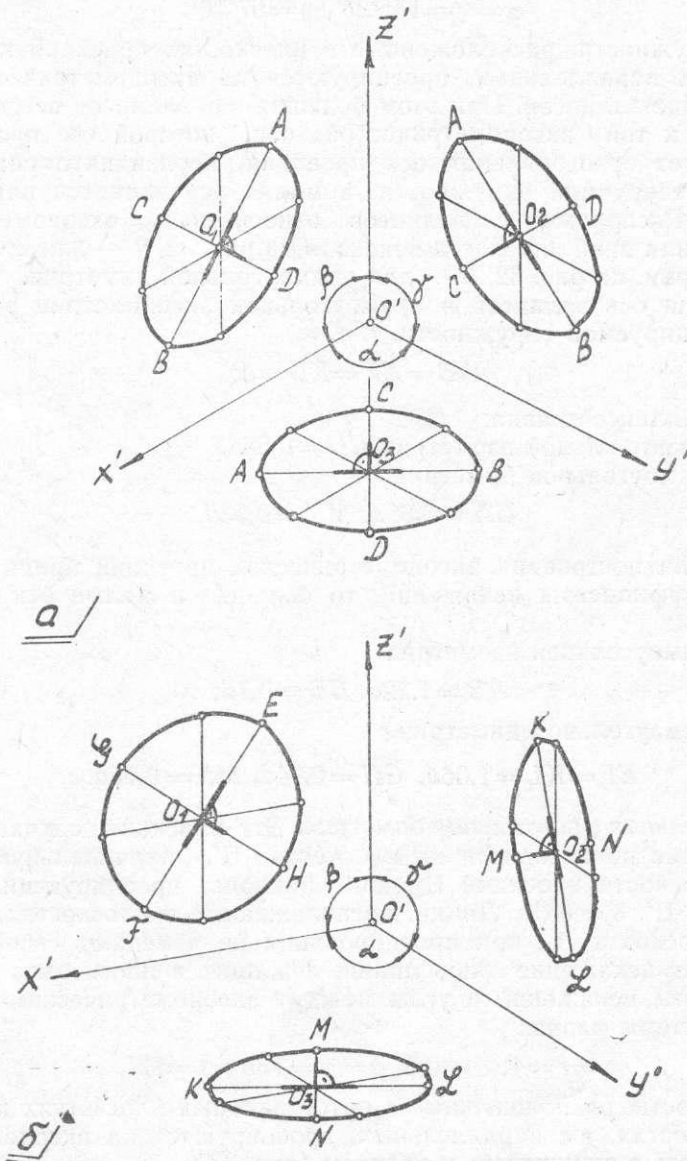


Рис. 32

При построении изображений редко пользуются натуральными коэффициентами искажений, обычно применяют приведенные коэффициенты искажений, равные для прямоугольной изометрии  $p=q=r=1$ , для прямоугольной диметрии  $p=r=1, q=0,5$ . Применение таких коэффициентов удобно для построения аксонометрических проекций, так как дает возможность пользоваться действительными размерами или размерами, уменьшенными в два раза. Но при этом получается не натуральная аксонометрическая проекция, а увеличенная в изометрии в 1,22 раза, в диметрии — в 1,06 раза.

2. Углы между аксонометрическими осями являются тупыми.

Для прямоугольной изометрии (рис. 32, а)

$$\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ.$$

Для прямоугольной диметрии (рис. 32, б)

$$\alpha = \gamma = 131^\circ 25', \beta = 97^\circ 10'.$$

3. Окружности, расположенные в плоскостях проекций или в плоскостях, им параллельных, проецируются на аксонометрическую плоскость в виде эллипсов. При этом большая ось эллипсов всегда перпендикулярна к той аксонометрической оси, которой в пространстве соответствует ортогональная ось проекций, перпендикулярная к плоскости проецируемой окружности, а малая ось эллипсов параллельна этой оси. Расположение эллипсов относительно аксонометрических осей в той или иной плоскости показано на рис. 32, а — для прямоугольной изометрии, на рис. 32, б — для прямоугольной диметрии.

Большая ось эллипсов в прямоугольной аксонометрии равна диаметру проецируемой окружности, т. е.

$$AB = EF = KL = d;$$

малая ось эллипсов равна:

для прямоугольной изометрии  $CD = 0,58d$ ,

для прямоугольной диметрии

$$GH = 0,88d, MN = 0,33d.$$

Если для построения аксонометрических проекций принять приведенные коэффициенты искажений, то большие и малые оси эллипсов будут равны:

для прямоугольной изометрии

$$AB = 1,22d, CD = 0,7d;$$

для прямоугольной диметрии

$$EF = KL = 1,06d, GH = 0,94d, MN = 0,35d.$$

*Косоугольная фронтальная диметрия.* Эта проекция получается, если проецирование производится на плоскость  $\Pi'$ , параллельную фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ , при наклоне проецирующих лучей к плоскости  $\Pi'$ ,  $\varphi \approx 63^\circ$ . Линии, расположенные в плоскостях, параллельных плоскости  $\Pi_2$ , при проецировании не изменяют своей длины, а происходит искажение лишь линий, лежащих в плоскостях  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$ . Коэффициенты искажений и углы между аксонометрическими осями для этой системы равны:

$$p = r = 1, q = 0,5, \alpha = \gamma = 135^\circ, \beta = 90^\circ.$$

Окружности, расположенные в ортогональных плоскостях проекций или в плоскостях, им параллельных, проецируются на аксонометрическую плоскость в окружность и эллипсы (рис. 33).

Диаметр окружности  $PQ=d$ . Большая и малая ось эллипсов равны:

$$RS=1,06d, TU=0,35d,$$

где  $d$  — диаметр проецируемой окружности.

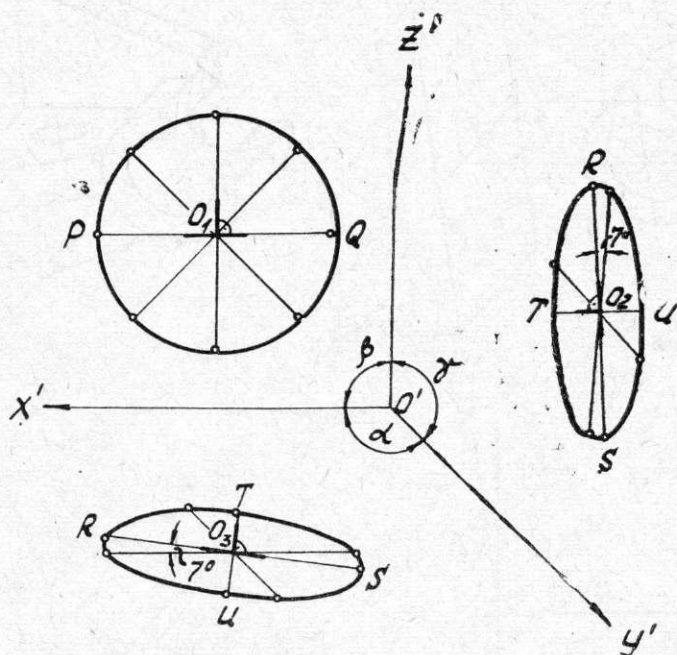


Рис. 33

Оси эллипсов наклонены к аксонометрическим осям  $o'x'$  и  $o'z'$  под углом  $7^\circ$ , как указано на чертеже.

## § 9. ПОСТРОЕНИЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ДЕТАЛЕЙ

Для улучшения наглядности изображений тех или иных деталей часто приходится прибегать к построению их аксонометрических проекций. Они обычно строятся следующим образом:

1) выбирается вид аксонометрических проекций в зависимости от характера и формы детали;

2) выбирается расположение детали относительно направления проецирования, т. е. определяется, какие стороны детали должны быть видны;

3) производится ориентирование детали относительно ортогональных осей проекций с таким расчетом, что можно было бы легко определить координаты ее точек, которые в дальнейшем будут использованы для построения аксонометрической проекции;

4) строятся аксонометрические оси в связи с выбранной аксонометрической системой;

5) производится непосредственное построение аксонометрической проекции детали, причем последовательность ее построения зависит от формы детали.

На рис. 34 дан пример построения кронштейна в прямоугольной диметрии, его ортогональный чертеж дан на рис. 34, а. Последователь-

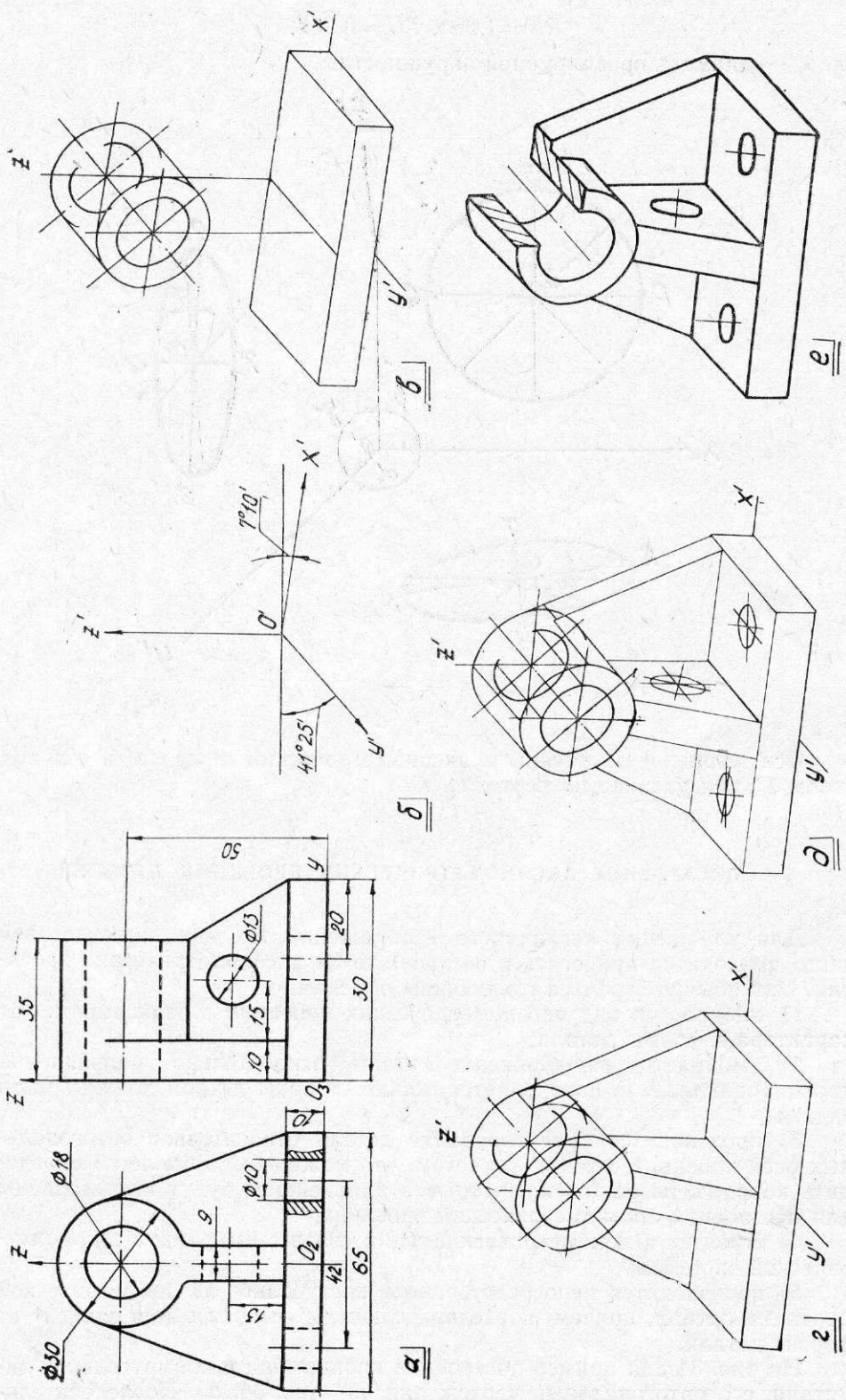


Рис. 34

ность построения аксонометрической проекции кронштейна следующая:

1 стадия — построение аксонометрических осей (рис. 34, б).

2 стадия — построение очертаний опорной плиты и головки кронштейна (рис. 34, в).

3 стадия — построение очертаний задней стенки и ребра жесткости кронштейна (рис. 34, г).

4 стадия — построение эллипсов — проекций отверстий, расположенных в опорной плите и ребре жесткости. Выполнение разреза головки кронштейна (рис. 34, д).

5 стадия — штриховка плоскостей разреза и окончательная обводка видимых контуров детали (рис. 34, е).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С., Прянишникова З. И., Тевлин А. М. и Федотов Г. И. Начертательная геометрия. М., «Высшая школа», 1965.
2. Попов Н. А. Курс начертательной геометрии. Гостехтеоретиздат, 1947.
3. Посвянский А. Д. Краткий курс начертательной геометрии. М., «Высшая школа», 1965.
4. Посвянский А. Д., Рыжов Н. Н. Сборник задач по начертательной геометрии. М., «Высшая школа», 1966.
5. Панин В. И., Кочнев М. И., Иващенко К. И., Стуканова Г. Ф. Сборник задач по начертательной геометрии. Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. С. П. Королева, 1972.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

Раздел I. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ КУРСА И МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ . . . . .	3
Глава I. Пересечение поверхности с плоскостью и с прямой линией. Раз- вертка поверхностей. Плоскости, касательные к поверхности . . . . .	3
§ 1. Пересечение многогранников плоскостью. Развертка поверхно- сти многогранников . . . . .	3
§ 2. Сечение поверхностей вращения плоскостью. Развертка поверх- ности . . . . .	11
§ 3. Пересечение прямой с поверхностью . . . . .	18
§ 4. Плоскости, касательные к поверхности . . . . .	21
Глава II. Взаимное пересечение поверхностей . . . . .	24
§ 5. Взаимное пересечение многогранников . . . . .	24
§ 6. Пересечение многогранников с поверхностями вращения . . . . .	26
§ 7. Взаимное пересечение поверхностей вращения . . . . .	31
Глава III. Аксонометрические проекции . . . . .	35
§ 8. Основные положения аксонометрического проецирования . . . . .	35
§ 9. Построение аксонометрических проекций деталей . . . . .	39
Литература . . . . .	41

*Виктор Иванович Панин, Михаил Иванович Кочнев,  
Клара Ивановна Иващенко, Галина Ивановна Панкова*

**ПРОЕКЦИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ ДЕТАЛЕЙ  
В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Учебное пособие

Редактор *Н. В. Касаткина*  
Техн. редактор *Н. М. Каленюк*  
Корректор *Л. М. Соколова*

ЕО04160. Сдано в набор 16/1 1978 г. Подписано в печать 7/VI 1978 г.  
Формат 70×108<sup>1/16</sup>. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура.  
Высокая печать. Физ. печ. л. 2,75. Усл. печ. л. 4,25.  
Уч.-изд. л. 4,3. Тираж 1500 экз. Заказ № 524. Цена 20 коп.  
Темплан 1978 г., поз. 1156.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени  
авиационный институт им. С. П. Королева,  
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

---

Областная тип. им. Мяги, г. Куйбышев, ул. Вспецка, 60.

Цена 20 коп.